Оглавление

Предисловие . . . 4
1 Примеры теорий гомологий . . . 5
2 Гомотопическая инвариантность гомологий . . . 15
3 Относительные гомологии и изоморфизм вырезания . . . 20
4 Длинная точная последовательность пары . . . 23
5 Лемма о пяти гомоморфизмах . . . 28
6 Последовательность и принцип Майера–Вьеториса . . . 29
7 Аксиоматический подход к построению теории гомологий 32
8 Когомологии и гомологии с коэффициентами в абелевой группе . . . 35
9 Умножение в когомологиях . . . 39
10 Гомологии многообразий . . . 44
11 Двойственность и когомологии . . . 52
12 Теория Морса . . . 55
13 Гомологии комплексных многообразий . . . 62
14 Спектральная последовательность . . . 68
15 Спектральная последовательность расслоения . . . 73
16 Пример: теорема Пушкаря о диаметрах подмногообразий евклидова пространства . . . 80
17 Пространство Эйленберга–Маклейна как классифицирующее пространство гомологий . . . 87
18 Гомологии и гомотопии . . . 91
19 Грассманианы и исчисление Шуберта . . . 96
Письменный экзамен . . . 103

Предисловие

Представленный текст является обработанными записками лекций, прочитанных в Научно-образовательном центре МИ РАН в осеннем семестре 2005 года. По теории гомологий имеется огромное количество замечательных учебников, поэтому необходимость появления еще одной книжки требует обоснования. Одно из основных отличий представленного текста является его сравнительно небольшой объем. Это позволяет читателю быстро войти в курс дела и охватить сразу целиком почти весь предмет. Я постарался включить по возможности все основные методы, используемые при вычислении гомологий, включая теорию Морса, двойственность Пуанкаре и спектральные последовательности. Не останавливаясь на подробностях доказательств, я предпочел больше времени уделить разбору разнообразных примеров и приложений. Поэтому данный курс следует рассматривать как «практическое руководство пользователя», заинтересованного в применении теории гомологий в своей области математики. Одним из очевидных недостатков такого подхода является недостаточная проработка технических деталей. Доказательства многих утверждений приведены схематически или оставлены читателю в виде упражнений, поэтому от читателя требуется вдумчивость и трудолюбие. Как показали проведенные экзамены, недостаточное уделение внимания деталям вызвало у некоторых слушателей обманчивое впечатление простоты предмета, в результате чего не до конца было осознано кардинальное различие между топологическими свойствами открытых и замкнутых многообразий, относительных и абсолютных гомологий, тривиальных и косых расслоений, гомологически простых и не простых расслоений и т.п. В любом случае, вслед за освоением основ теории, я настоятельно рекомендую проработать подробно имеющиеся более полные учебники по теории гомологий.

1 Примеры теорий гомологий

Теория гомологий сопоставляет всякому топологическому пространству X последовательность абелевых групп $H_k(X)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ которые являются гомотопическими инвариантами пространства: если два пространства гомотопически эквивалентны, то и соответствующие группы гомологий изоморфны. Определение групп гомологий не столь простое, как для других инвариантов подобного рода (например, гомотопических групп, бордизмов и т.п.), однако эти трудности сполна компенсируются относительной простотой вычисления гомологий. Наличие большого количества разнообразных методов работы с гомологиями делает их незаменимым орудием в любых топологических исследованиях.

Одна из первых трудностей, с которой сталкивается всякий начинающий математик при изучении гомологий, состоит в наличии огромного количества различных неэквивалентных теорий гомологий: существуют симплициальные гомологии, сингулярные, клеточные, гомологии и когомологии Чеха, Александера, де Рама, и другие альтернативные теории. Все эти теории приводят к разным, вообще говоря, инвариантам, однако во всех практических задачах различие между этими теориями не проявляется: в большинстве приложений достаточно считать, что пространство X является клеточным[1] (или гомотопически эквивалентно клеточному пространству). А для клеточных пространств все эти теории приводят к одному и тому же.

Пример 1.1. Группа $H_0(X)$ имеет вид $\mathbb{Z}^k$, где k – число компонент связности пространства X. В случае гомологий Чеха компоненты связности рассматриваются в топологическом смысле (минимальные непустые подпространства, которые одновременно открыты и замкнуты), а, например, в случае сингулярных гомологий берутся компоненты *линейной* связности. Для клеточных пространств оба понятия совпадают, однако нетрудно привести пример «паталогического» пространства (типа замыкания графика функции $y = \sin \frac{1}{x}$), для которого компоненты связности и линейной связности различаются.

[1] Иногда вместо термина «клеточное пространство» используют термин «клеточный комплекс» или «CW-комплекс», однако мы сохраним слово «комплекс» для понятия цепного комплекса.

В основе любого построения теории гомологий лежит понятие цепного комплекса.

Определение 1.2. *Цепным комплексом* $(C_\bullet, \partial)$ называется последовательность абелевых групп и гомоморфизмов между ними

$$0 \xleftarrow{\partial} C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \xleftarrow{\partial} \dots,$$

таких, что композиция двух соседних гомоморфизмов ∂ является нулевым гомоморфизмом,

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Элементы группы C_k называются *k-мерными цепями*, а ∂ – *граничным гомоморфизмом*, или *оператором взятия границы*. Цепь a называется *замкнутой*, или *циклом*, если $\partial a = 0$, и *точной*, или *границей*, если $a = \partial b$ для некоторой $(k+1)$-мерной цепи b.

Группой k-мерных гомологий комплекса C называется факторгруппа группы k-циклов по границам,

$$H_k(C) = \frac{\mathrm{Ker}(\partial\colon C_k \to C_{k-1})}{\mathrm{Im}(\partial : C_{k+1} \to C_k)}.$$

Условие $\partial^2 = 0$ гарантирует, что всякая точная цепь является замкнутой, т.е. образ гомоморфизма $\partial\colon C_{k+1} \to C_k$ действительно лежит в ядре гомоморфизма $\partial\colon C_k \to C_{k-1}$. Классы гомологий представляются своими циклами. Два цикла задают один и тот же класс гомологий, если они отличаются на границу. В этом случае говорят, что данные два цикла *гомологичны.*

С формальной точки зрения, гомоморфизмы $\partial\colon C_k \to C_{k-1}$ не связаны друг с другом для различных k, и их следовало бы обозначать по-разному (например, добавляя соответствующий индекс). Однако для упрощения обозначений мы будем для всех этих гомоморфизмов использовать один и тот же символ ∂.

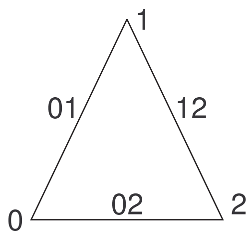
Как правило, группы C_k свободны, т.е. изоморфны прямой сумме некоторого (возможно, бесконечного) количества экземпляров $\mathbb{Z}$. Однако гомологии уже могут иметь кручение (прямые слагаемые вида $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Всякая теория гомологий состоит в конструкции, сопоставляющей топологическому пространству цепной комплекс. Группами гомологий пространства называются группы гомологий соответствующего комплекса. Затем доказывается, что, в отличие от групп цепей, группы гомологий не зависят ни от произвола, имеющегося в конструкции, ни от выбора конкретного пространства в классе гомотопически эквивалентных. Приведем краткий обзор некоторых из наиболее популярных конструкций.

Симплициальные гомологии

Понятие симплициальных гомологий, по существу, комбинаторное. Пусть задано конечное упорядоченное множество V, элементы которого называются *вершинами*, и зафиксирована некоторая совокупность S его непустых подмножеств, называемых *гранями*. При этом требуется выполнение следующего условия: вместе со всяким подмножеством $f \subset V$, входящим в S, все непустые подмножества в f также входят в S. Пара (V, S) называется *симплициальным комплексом.*

k-мерным симплексом называется выпуклая оболочка $(k+1)$ точки общего положения в пространстве достаточно большого числа измерений. Например, 1-мерный симплекс – это отрезок, двумерный – треугольник, трехмерный – тетраэдр, и т.д. Всякому симплициальному комплексу (V, S) сопоставляется его *геометрическая реализация* $K(V, S)$. Это топологическое пространство, образованное склейкой симплексов, множество вершин которых входит в S. Более подробно, поместим точки множества V общим образом в евклидово пространство большой размерности. Каждому подмножеству $f \subset V$, входящему в S, сопоставим симплекс, являющийся выпуклой оболочкой входящих в f точек. Объединение всех таких симплексов и образует геометрическую реализацию данного симплициального комплекса.



Пример 1.3.

Пусть V состоит из трех точек, обозначаемых 0, 1, и 2, а S состоит из шести подмножеств $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, и $\{1, 2\}$.

Геометрической реализацией этого симплициального комплекса является граница треугольника, гомеоморфная окружности S^1.

Пусть задан симплициальный комплекс. *Симплициальной k-цепью* называется произвольная формальная линейная комбинация с целыми коэффициентами его k-мерных граней. Более строго, группой $C_k(V, S)$ симплициальных k-цепей называется свободная абелева группа, образующие которой $\Delta_{v_0,\ldots,v_k}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с $(k+1)$-элементными подмножествами $\{v_0, \ldots, v_k\} \subset V$, входящими в S. При обозначении образующих мы всегда предполагаем, что индексы $v_0, \ldots, v_k$ идут в строго возрастающем порядке (напомним, что множество вершин V упорядочено по определению). Граничный оператор задается на образующих явной формулой

$$\partial\Delta_{v_0,\ldots,v_k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, \Delta_{v_0,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k}.$$

Иными словами, границей k-мерного симплекса является сумма взятых с определенными знаками всех его $(k-1)$-мерных граней.

Гомологии построенного комплекса называются *симплициальными гомологиями* топологического пространства $K(V, S)$. Тот факт, что симплициальные гомологии не зависят от симплициальной реализации данного топологического пространства (и даже не меняются при замене пространства на гомотопически ему эквивалентное), далеко не тривиален.

Задача 1.4. Докажите равенство $\partial^2 = 0$.

Задача 1.5. Приведите несколько симплициальных реализаций окружности и вычислите симплициальные гомологии каждой из этих реализаций.

Задача 1.6. Докажите, что симплициальные гомологии не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора порядка на множестве вершин.

Симплициальные гомологии задают вполне однозначный алгоритм их вычислений, однако для конкретных вычислений пользоваться им не очень удобно: даже для простейших пространств, таких, как тор, или сфера, всякая симплициальная реализация содержит довольно большое количество граней разных размерностей, и для вычисления гомологий приходится вычислять ранги матриц довольно большого размера. С точки зрения конкретных вычислений определяемые ниже клеточные гомологии существенно удобнее.

Клеточные гомологии

Напомним, что k-мерной *клеткой* называется внутренность единичного k-мерного шара B^k. Говорят, что на топологическом пространстве X задана структура *клеточного пространства*, если оно представлено в виде несвязного объединения клеток $X = \bigcup \sigma_\alpha^k$ разных размерностей, при этом требуется, чтобы для всякой клетки гомеоморфизм $\operatorname{Int} B_k \to \sigma_\alpha^k$ продолжался до непрерывного отображения замкнутого шара $\varphi_\alpha \colon B_k \to X$, при котором образ границы шара содержится в объединении клеток меньших размерностей (внутренность шара отображается на свой образ взаимно однозначно, но разным точкам границы вполне разрешается иметь общий образ). Помимо этого, предполагается выполнение еще двух аксиом, C и W, которые я сейчас обсуждать не буду. Необходимость в этих аксиомах появляется, в основном, когда количество клеток бесконечно. Для технических потребностей в клеточную структуру разбиения часто включают сами характеристические отображения. Для целей же вычисления гомологий достаточно лишь задать *ориентацию* каждой клетки (как гладкого k-мерного многообразия).

Группой клеточных k-мерных цепей клеточного пространства X называется свободная абелева группа, образующие которой σ_α^k находятся во взаимно однозначном соответствии с k-мерными клетками этого пространства. Значение граничного гомоморфизма на всякой k-мерной клетке является линейной комбинацией $(k-1)$-мерных клеток,

$$\partial \sigma_\alpha^k = \sum_\beta [\sigma_\alpha^k \colon \sigma_\beta^{k-1}]\, \sigma_\beta^{k-1}.$$

Коэффициенты $[\sigma_\alpha^k \colon \sigma_\beta^{k-1}]$ этой линейной комбинации называются *коэффициентами инцидентности*. Коэффициент $[\sigma_\alpha^k \colon \sigma_\beta^{k-1}]$ равен кратности, с которой клетка σ_β^{k-1} входит в границу клетки σ_α^k. Определение этого коэффициента следующее. *k-мерным* *остовом* клеточного пространства X называется подпространство $\mathrm{sk}^k(X) \subset X$, образованное объединением всех клеток размерностей не выше k. Остовы образуют возрастающую замкнутую фильтрацию на пространстве X,

$$\mathrm{sk}^0(X) \subset \mathrm{sk}^1(X) \subset \mathrm{sk}^2(X) \subset \dots \subset X.$$

каждый последовательный фактор $\mathrm{sk}^k(X)/\,\mathrm{sk}^{k-1}(X)$ этой фильтрации изоморфен букету k-мерных сфер, по одной сфере для каждой k-мерной клетки. Коэффициент инцидентности $[\sigma^k_\alpha\colon \sigma^{k-1}_\beta]$ определяется как степень следующего отображения $(k-1)$-мерных сфер

$$S^{k-1} = \partial B^k \to \mathrm{sk}^{k-1}(X) \to \mathrm{sk}^{k-1}(X)/\,\mathrm{sk}^{k-2}(X) \to S^{k-1},$$

где первое отображение – ограничение характеристического отображения для клетки σ^k_α на границу шара, а последнее задается стягиванием всех сфер букета $\mathrm{sk}^{k-1}(X)/\,\mathrm{sk}^{k-2}(X)$, кроме сферы, соответствующей клетке σ^{k-1}_β.

Для конкретных вычислений клеточные гомологии наиболее эффективны, однако использовать их в качестве основы для построения теории гомологий черезвычайно трудно (даже равенство $\partial^2 = 0$ превращается в нетривиальную теорему). Мы обойдем все эти трудности, получив клеточные гомологии в качестве алгоритма вычисления сингулярных.

Пример 1.7. n-мерная сфера может быть разбита всего на две клетки $S^n = \sigma^0 \cup \sigma^n$ размерностей 0 и n. Соответствующий цепной комплекс имеет вид

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots.$$

Граничные гомоморфизмы в этом комплексе, очевидно, нулевые, по соображениям размерностей. Следовательно, гомологии сферы $H_k(S^n)$ изоморфны $\mathbb{Z}$ при k равном нулю или n и тривиальны при всех остальных k. Аналогичный ответ можно получить и при помощи симплициальных гомологий, но насколько при этом усложняются вычисления!

Пример 1.8. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является гладким многообразием вещественной размерности $2n$. На нем имеется естественное клеточное разбиение, имеющее по одной клетке каждой четной размерности от 0 до $2n$ (опишите его!). Поскольку клетки нечетной размерности отсутствуют, все граничные гомоморфизмы опять нулевые по соображениям размерностей. Следовательно, группа $H_k(\mathbb{C}P^n)$ изоморфна $\mathbb{Z}$ для всякого четного k от 0 до $2n$ и тривиальна для остальных k.

Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ обладает аналогичным клеточным разбиением, но в нем присутствуют клетки всех размерностей от 0 до n, и вычислять граничный гомоморфизм приходится «по-честному». Одно из описаний этого клеточного разбиения состоит в следующем. Проективное пространство получается из n-мерной сферы отождествлением диаметрально противоположных точек. Разобьем сферу экватором на две полусферы. Открытые части полусфер являются клетками, а экватор является сферой на единицу меньшей размерности. Разобьем аналогичным образом экватор на две полусферы и т.д. В результате мы получим клеточное разбиение сферы с двумя клетками в каждой размерности от 0 до n. Антиподальная инволюция переставляет между собой пары клеток одинаковой размерности. Отождествляя эти клетки между собой, мы получаем искомое клеточное разбиение проективного пространства. Таким образом, цепной комплекс указанного клеточного разбиения имеет вид

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

(мы не указываем тривиальные группы в размерностях, больших $n+1$, поскольку они не дают вклад в гомологии).

Задача 1.9. Определите граничный гомоморфизм в приведенном цепном комплексе и вычислите гомологии пространства $\mathbb{R}P^n$ для различных n.

Для облегчения решения последней задачи я приведу более конструктивное описание коэффициентов инцидентности. В ситуациях, возникающих из практических задач, замыкания клеток имеют, как правило, полуалгебраические особенности (в объемлющем пространстве большой размерности, в которое вложено наше топологическое пространство). Рассмотрим некоторую $(k-1)$-мерную клетку σ_β^{k-1}, выберем на ней произвольную точку общего положения, и проведем в окрестности этой точки трансверсаль дополнительной размерности к данной клетке. Клетки соседней размерности k высекут на этой трансверсали набор кривых, выходящих из начала координат. Каждой из этих кривых можно приписать знак, положительный или отрицательный, в зависимости от того, согласована или нет ориентация клетки σ_β^{k-1} с соответствующей ветвью примыкающей k-мерной клетки[2]. *Коэффициент инцидентности* $[\sigma_\alpha^k : \sigma_\beta^{k-1}]$ *равен количеству кривых на трансверсали, принадлежащих клетке* σ_α^k *и посчитанных с учетом знаков.*

Задача 1.10. Вычислите клеточные гомологии а) двумерного тора; б) сферы с g ручками; в) проективной плоскости; г) бутылки Клейна.

Задача 1.11. Симплициальное разбиение является частным случаем клеточного. Докажите, что клеточный цепной комплекс для симплициального клеточного разбиения сводится к симплициальному. Тем самым, клеточные гомологии симплициального пространства совпадают с симплициальными (при условии, что корректность определения и гомотопическая инвариантность тех и других гомологий считаются доказанными).

Всякое гладкое компактное n-мерное многообразие M допускает симплициальное разбиение (несмотря на геометрическую очевидность этого утверждения, его строгое доказательство довольно трудоемко). Отсюда следует, что его (клеточные) гомологии тривиальны в размерностях, больших n.

Задача 1.12. Вычислите группу гомологий $H_n(M)$ старшей размерности n-мерного многообразия M.

Сингулярные гомологии

Сингулярные гомологии практически никогда не удается вычислить напрямую, исходя из приведенного ниже определения. Тем

[2]Напомню, что граница ориентированного n-мерного многообразия наделяется естественной ориентацией, задаваемой правилом «внешнюю нормаль – в начало»: если базис $e_1, \dots, e_n$ касательных векторов положительно ориентирует исходное многообразие в точке его края, причем векторы $e_2, \dots, e_n$ касаются края, а вектор e_1 ему трансверсален и направлен наружу многообразия, то положительная ориентация края задается базисом его касательных векторов $e_2, \dots, e_n$.

не менее, они являются наиболее удобными для построения теории и доказательства общих теорем. В отличие от симплициальных или клеточных, определение сингулярных гомологий применимо для произвольного топологического пространства. Зафиксируем для каждого натурального k раз и навсегда стандартный k-мерный симплекс $\Delta_{0,1,\ldots,k}$. В качестве такого симплекса можно взять, например, симплекс, задаваемый неравенствами $x_i \geqslant 0$ на гиперплоскости $x_0 + \cdots + x_k = 0$ в координатном пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$.

Определение 1.13. *Сингулярным симплексом* на топологическом пространстве X называется произвольное непрерывное отображение $\psi\colon \Delta_{0,1,\ldots,k} \to X$ стандартного симплекса в X. Группой $C_k(X)$ *сингулярных k-цепей* пространства X называется свободная абелева группа, образующие которой находятся во взаимно-однозначном соответствии со всевозможными сингулярными симплексами на X. Граничный гомоморфизм задается на сингулярном симплексе ψ явной формулой

$$\partial\psi = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \, \psi \circ \rho_{k,i},$$

где $\rho_{k,i}\colon \Delta_{0,1,\ldots,k-1} \to \Delta_{0,1,\ldots,k}$ – зафиксированное раз и навсегда отображение, отождествляющее грань $\Delta_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$ стандартного k-мерного симплекса со стандартным $(k-1)$-мерным симплексом. *Сингулярными гомологиями* пространства X называются гомологии комплекса его сингулярных цепей.

На первый взгляд, определение выглядит ужасающим: множество образующих в комплексе не просто бесконечно, а имеет континуальную мощность. Несколько успокаивает то, что в каждой сингулярной цепи участвует лишь конечное число сингулярных симплексов.

Задача 1.14. Рассмотрим в некотором топологическом пространстве X непрерывный путь $\psi\colon [0,1] \to X$ как сингулярный одномерный симплекс. Пусть $\overline{\psi}$ – тот же путь, но пройденный в обратном направлении. Проверьте, что $\partial(\psi+\overline{\psi}) = 0$. Докажите, что сингулярная цепь $\psi + \overline{\psi}$ гомологична нулю: постройте сингулярную 2-цепь φ, такую, что $\partial\varphi = \psi + \overline{\psi}$.

Вот почти единственный случай, когда сингулярные гомологии удается вычислить непосредственно из определения.

Задача 1.15. Вычислите сингулярные гомологии точки.

Гомологии Чеха

Для сравнения приведем еще один способ построения теории гомологий. Пусть задано топологическое пространство X и его покрытие $X = \bigcup U_\alpha$ открытыми подмножествами. С таким покрытием связывается следующий комплекс. Его образующими размерности k служат всевозможные упорядоченные наборы попарно различных индексов $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$, такие что $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k} \neq \varnothing$, а граничный оператор задается формулой

$$\partial(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_k).$$

Если существует покрытие, обладающее дополнительным свойством, что все непустые пересечения в нем стягиваемы, то гомологии приведенного комплекса не зависят от выбора такого покрытия и называются *гомологиями Чеха* пространства X. Если же такого покрытия выбрать не удается, то гомологии Чеха определяются как проективный предел гомологий покрытий, взятый по всем покрытиям и их измельчениям.

Следует отметить, что гомологии Чеха обладают более приятными свойствами, чем сингулярные. Поэтому при изучении «паталогических» пространств предпочтительнее пользоваться гомологиями Чеха.

В качестве альтернативы можно ограничиться *кососимметричными* цепями: в определении группы k-цепей наложить дополнительное равенство $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) = (-1)^{\operatorname{sign} s}(\alpha_{s(0)}, \ldots, \alpha_{s(k)})$ для всякой перестановки s. Гомологии при этом останутся теми же. Как видно из определения, гомологии покрытия равны симплициальным гомологиям некоторого симплициального комплекса (какого?). Этот симплициальный комплекс называется *нервом покрытия.*

Задача 1.16. Рассмотрим покрытие проколотой плоскости $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ тремя полуплоскостями, ограниченными прямыми, проходящими через начало координат. Вычислите гомологии Чеха этого покрытия. Определите нерв. Являются ли нерв и пространство X в данном случае гомеоморфными? Гомотопически эквивалентными?

2 Гомотопическая инвариантность гомологий

Соответствие, сопоставляющее топологическому пространству пространство его гомологий, функториально. Это означает, что всякому непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ соответствует гомоморфизм гомологий $f_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$, называемый *гомоморфизмом прямого образа*. При этом композиции отображений соответствует композиция гомоморфизмов гомологий и т.п. Алгебраическим выражением гомоморфизма f_* является понятие гомоморфизма цепных комплексов.

Определение 2.1. *Гомоморфизмом цепных комплексов* $(C_\bullet, \partial)$ и $(C'_\bullet, \partial)$ называется последовательность гомоморфизмов $f\colon C_k \to C'_k$, коммутирующих с операцией взятия границы.

Как обычно, для упрощения обозначений мы используем один и тот же символ f для гомоморфизмов $C_k \to C'_k$ с различными номерами k. Гомоморфизм комплексов изображают в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 & C_0 \arrow[l] \arrow[d, "f"] & C_1 \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "f"] & C_2 \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[l, "\partial"'] \\ 0 & C'_0 \arrow[l] & C'_1 \arrow[l, "\partial"'] & C'_2 \arrow[l, "\partial"'] & \cdots \arrow[l, "\partial"'] \end{tikzcd}$$

Условие согласованности гомоморфизмов f с граничным оператором равносильно *коммутативности* диаграммы. В гомологической алгебре имеется соглашение, согласно которому всякая изображенная в тексте диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов между ними предполагается коммутативной (если противное не оговорено явно). Из определения мгновенно вытекает, что образ замкнутой цепи замкнут, а образ точной цепи точен. Следовательно, всякий гомоморфизм комплексов индуцирует соответствующий гомоморфизм групп гомологий

$$f_*\colon H_k(C) \to H_k(C').$$

Построение гомоморфизма прямого образа для различных теорий гомологий топологических пространств очевидно: образ цепи под действием отображения вновь является цепью. В комментариях нуждается только определение гомоморфизма f_* для клеточных гомологий. Согласно *теореме о клеточной аппроксимации* всякое непрерывное отображение клеточных пространств можно заменить на гомотопное ему, такое, которое сохраняет фильтрацию по остовам (на практике удобно действовать наоборот: по заданному отображению построить клеточные разбиения участвующих в отображении пространств, согласованные с данным отображением). Если отображение $f\colon X \to Y$ сохраняет фильтрации по остовам, то оно индуцирует отображение соответствующих букетов сфер $\operatorname{sk}^k(X)/\operatorname{sk}^{k-1}(X) \longrightarrow \operatorname{sk}^k(Y)/\operatorname{sk}^{k-1}(Y)$. Под действием гомоморфизма f_* образующая σ_a^k клеточного комплекса пространства X переходит линейную комбинацию

$$f_*\sigma_a^k = \sum_\beta c_{\alpha,\beta}\,\tilde{\sigma}_\beta^k$$

образующих клеточного комплекса пространства Y, в которой коэффициент $c_{\alpha,\beta}$ задается как степень следующего отображения k-мерных сфер

$$S^k \longrightarrow \operatorname{sk}^k(X)/\operatorname{sk}^{k-1}(X) \longrightarrow \operatorname{sk}^k(Y)/\operatorname{sk}^{k-1}(Y) \longrightarrow S^k,$$

где первая стрелка задается вложением клетки с номером α, а последняя – стягиванием всех сфер букета, кроме сферы, соответствующей клетке с номером β. Согласованность построенного гомоморфизма цепных комплексов с действием граничного гомоморфизма не вполне очевидна, хотя и несложно проверяется.

Напомним, что два непрерывных отображения f_0 и f_1 из пространства X в пространство Y называются *гомотопными*, если они соединяются непрерывным семейством f_t, $t \in [0,1]$ в пространстве непрерывных отображений из X в Y. Пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, такие что обе композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественному отображению в себя пространств X и Y, соответственно.

Теорема 2.2. *У гомотопных отображений f_0 и f_1 гомоморфизмы прямого образа сингулярных гомологий совпадают,*

$$(f_0)_* = (f_1)_*\colon H_k(X) \to H_k(Y).$$

Следствие 2.3. *Гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные сингулярные гомологии.*

Теорема и ее следствие имеют аналоги и для других теорий гомологий, но формулируются они несколько по-другому. Для клеточных гомологий гомотопическая инвариантность заложена в самом определении гомоморфизма прямого образа. Поэтому аналог приведенных утверждений для клеточных гомологий состоит в корректности определения гомоморфизма f_* (независимости от выбора клеточной аппроксимации).

Для симплициальных гомологий гомотопическая эквивалентность моделируется набором комбинаторных операций, не меняющих гомотопический тип симплициального комплекса. Имеется прямое доказательство того факта, что симплициальные гомологии не меняются при каждой из этих операций. Однако утверждение о том, что симплициальные гомологии являются не комбинаторным, а гомотопическим инвариантом соответствующего пространства, является гораздо более общим, и доказать этот факт можно только сведением симплициальных гомологий к какой-либо более общей теории гомологий, например, теории сингулярных гомологий.

Алгебраическим выражением равенства двух гомоморфизмов гомологий служит понятие цепной гомотопии. Пусть заданы цепные комплексы $(C_\bullet, \partial)$ и $C'_\bullet, \partial)$ и два гомоморфизма f_0 и f_1 между ними. Эти гомоморфизмы называются *цепно гомотопными*, если существует последовательность гомоморфизмов $H\colon C_k \to C'_{k+1}$, удовлетворяющих тождеству

$$H\,\partial + \partial\,H = f_1 - f_0.$$

Действие цепной гомотопии H направлено в сторону повышения градуировки, т.е. в сторону, противоположную действию граничного оператора:

$$\begin{tikzcd}
0 & C_0 \arrow[l] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, dashed, "H"] & C_1 \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, dashed, "H"] & C_2 \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[l, "\partial"'] \\
0 & C'_0 \arrow[l] & C'_1 \arrow[l, "\partial"'] & C'_2 \arrow[l, "\partial"'] & \cdots \arrow[l, "\partial"']
\end{tikzcd}$$

На диаграмме гомоморфизмы H изображены пунктирными линиями, поскольку дополненная ими диаграмма гомоморфизмов не является коммутативной. Для вычисления действия гомоморфизма $f_1 - f_0$ в гомологиях, в частности, для проверки тривиальности этого действия, достаточно знать его значение на замкнутых цепях. Выделять замкнутые цепи не всегда возможно. Вместо этого часто бывает удобнее проверить цепную гомотопность комплексов, проверив выполнение указанного тождества на произвольной цепи. Если же цепь $a \in C_k$ является все же замкнутой, то слагаемое $H\,\partial a$ обращается в ноль, и мы получаем, что образы $f_0(a)$ и $f_1(a)$ гомологичны (отличаются на границу цепи $Ha \in C'_{k+1}$). В результате мы получаем следующий простой критерий равенства гомоморфизмов в гомологиях.

Предложение 2.4. *Цепно гомотопные гомоморфизмы цепных комплексов индуцируют равные гомоморфизмы в гомологиях.*

В качестве иллюстрации понятия цепной гомотопии докажем следующий частный случай следствия 2.3.

Предложение 2.5. *Сингулярные гомологии всякого стягиваемого пространства тривиальны, т.е. такие же, как у точки.*

Напомним, что пространство X называется стягиваемым, если тождественное отображение этого пространства в себя гомотопно отображению в точку. Гомотопию, осуществляющую стягивание, можно представить в виде отображения $F\colon CX \to X$, где $CX = X \times [0,1]/X \times \{0\}$ – конус пространства X, причем ограничение отображения F на основание $X \times \{1\}$ конуса является тождественным. Для всякой сингулярной цепи $\psi\colon \Delta_{0,\ldots,k} \to X$ стягивание задает отображение $H\psi\colon C\Delta_{0,\ldots,k} \to X$. Конус над стандартным k-мерным симплексом можно отождествить со стандартным $(k+1)$-мерным симплексом (при этом нужно перенумеровать вершины, сопоставив отмеченной вершине конуса номер 0). Таким образом, отображение $H\psi$ можно рассматривать как сингулярную $(k+1)$-цепь. В результате мы построили гомоморфизм $\psi \mapsto H\psi$, действующий в направлении, противоположном действию граничного гомоморфизма

$$0 \longleftarrow C_1(X) \underset{H}{\overset{\partial}{\leftrightarrows}} C_2(X) \underset{H}{\overset{\partial}{\leftrightarrows}} C_3(X) \underset{H}{\overset{\partial}{\leftrightarrows}} \cdots .$$

Гомоморфизм H удовлетворяет тождеству цепной гомотопии. Действительно, граница конуса $C\Delta_{0,\ldots,k}$ над стандартным k-мерным симплексом состоит из его основания $\Delta_{0,\ldots,k}$ и боковых граней, которые являются, в свою очередь, конусами над гранями симплекса $\Delta_{0,\ldots,k}$, входящими в его границу. В результате мы получаем теоретико-множественное равенство

$$\partial C\Delta_{0,\ldots,k} = \Delta_{0,\ldots,k} \cup C\partial\Delta_{0,\ldots,k}.$$

Аккуратный учет знаков в соответствующих сингулярных цепях приводит к необходимому тождеству

$$H\partial + \partial H = \mathrm{Id}\,.$$

Это равенство доказывает, что всякая замкнутая цепь a точна: она является границей цепи Ha, т.е. границе конуса над ней самой. Это доказывает предложение.

Рассмотрим теперь более общий случай теоремы 2.2 и ее следствия. Заданную гомотопию $f_t\colon X \to Y$, $t \in [0,1]$ можно рассматривать как отображение $F\colon X \times [0,1] \to Y$. Пусть задан сингулярный симплекс $\psi\colon \Delta_{0,\dots,k} \to X$ на пространстве X. Взяв композицию отображения ψ с гомотопией, мы получаем отображение

$$\Psi\colon \Delta_{0,\dots,k} \times [0,1] \to Y$$

цилиндра над стандартным симплексом в Y. Граница этого цилиндра состоит из верхнего и нижнего основания, ограничение Ψ на которые совпадает с $f_1 \circ \psi$ и $f_0 \circ \psi$, соответственно, а также боковой поверхности, которая является цилиндром над границей симплекса. Таким образом, взяв в качестве $H(\psi)$ отображение Ψ, мы получаем необходимое свойство цепной гомотопии. Проблема заключается только в том, что цилиндр над симплексом не является симплексом, так что Ψ не является сингулярной цепью. Эту трудность несложно преодолеть: цилиндр над симплексом допускает стандартное симплициальное разбиение. А именно, обозначим через $0,\dots,k$ вершины нижнего основания цилиндра и через $0',\dots,k'$ соответствующие вершины верхнего основания. Тогда имеет место разложение

$$\Delta_{0,\dots,k} \times [0,1] = \bigcup_{i=0}^{k} \Delta_{0,\dots,i-1,i,i',(i+1)',\dots,k'}\,.$$

Таким образом, мы можем определить цепную гомотопию

$$H\colon C_k(X) \to C_{k+1}(Y),$$

положив

$$H\psi = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \Psi \circ \rho_i,$$

где $\rho_i\colon \Delta_{0,\dots,k+1} \to \Delta_{0,\dots,k} \times [0,1]$ – отображение, задающее отождествление стандартного $(k+1)$-мерного симплекса с симплексом $\Delta_{0,\dots,i-1,i,i',(i+1)',\dots,k'}$. Наличие цепной гомотопии доказывает теорему 2.2.

Задача 2.6. Проверьте, что построенный гомоморфизм H действительно является цепной гомотопией, связывающей гомоморфизмы $(f_0)_*$ и $(f_1)_*$.

3 Относительные гомологии и изоморфизм вырезания

На первой лекции я утверждал, что группы гомологий сопоставляются топологическим пространствам. В действительности, теория гомологий должна сопоставлять группы гомологий всякой *паре* (X, A) состоящей из топологического пространства X и его подпространства A. Определение гомологий пары состоит в следующем (оно применимо и к симплициальным, и к клеточным, и к сингулярным гомологиям). Комплекс $C_k(A)$ цепей в A является подкомплексом в комплексе $C_k(X)$. Назовем *группой относительных цепей* факторгруппу

$$C_k(X, A) = C_k(X)/C_k(A).$$

Относительные цепи образуют цепной комплекс, гомологии которого обозначаются через $H_k(X, A)$ и называются *гомологиями пары.* Для симплициальных, или клеточных гомологий мы предполагаем, что A является симплициальным, или клеточным подпространством, соответственно, в частности, A замкнуто. Однако в общем случае на A не накладывается никаких ограничений. Например, в теории многообразий часто рассматривают пары вида $(M, M \setminus L)$, где M – многообразие, а L – его замкнутое подмногообразие.

Задача 3.1. *Приведенными гомологиями* пространства X называются группы

$$\overline{H}_k(X) = H_k(X, \mathrm{pt}),$$

где $\mathrm{pt} \in X$ – выделенная точка. Докажите равенства

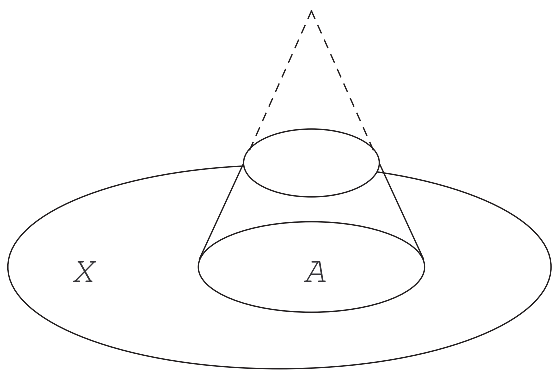
$$H_0(X) = \overline{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}, \qquad H_k(X) = \overline{H}_k(X), \quad k > 0.$$

Абсолютные гомологии являются частным случаем относительных (когда продпространство является пустым). Относительные же гомологии, в общем случае, через абсолютные не выражаются. Тем не менее, в одном важном случае, который чаще всего и встречается на практике, относительные гомологии сводятся все-таки к абсолютным.

Теорема 3.2. *Пусть X – клеточное пространство, $A \subset X$ – клеточное подпространство. Тогда для всех $k \geqslant 0$ имеет место изоморфизм*

$$H_k(X, A) \simeq \overline{H}_k(X/A).$$

Заметим, что для клеточных гомологий приведенный изоморфизм очевиден: образующие цепного комплекса для вычисления клеточных гомологий как пары (X, A) так и факторпространства X/A соответствуют клеткам пространства X, лежащим в дополнении к A. Докажем изоморфизм теоремы для сингулярных гомологий. Рассмотрим пространство $X \cup_A CA$, полученное приклеиванием к X конуса над A вдоль основания конуса, а также его подпространство $X \cup_A (A \times [0, 1/2])$, полученное «отрезанием верхушки конуса».



Тогда имеет место следующая цепочка изоморфизмов

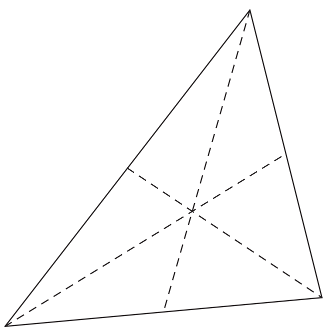
$$\begin{aligned} H_k(X, A) &\overset{1}{\simeq} H_k(X \cup_A (A \times [0, 1/2]), A \times [0, 1/2]) \\ &\overset{2}{\simeq} H_k(X \cup_A CA, CA) \\ &\overset{3}{\simeq} H_k(X/A, \mathrm{pt}) = \overline{H}_k(X/A). \end{aligned}$$

Изоморфизм 1 следует из гомотопической инвариантности гомологий: цилиндр $A \times [0, 1/2]$ можно стянуть вдоль образующих на его основание A. Изоморфизм 3 также вытекает из гомотопической инвариантности: поскольку конус является стягиваемым подпространством, то его можно стянуть, и в результате получится гомотопически эквивалентная пара пространств. (Тот факт, что процесс стягивания конуса CA к его вершине продолжается до отображения всего пространства $X \cup_A CA$ на себя, называется свойством Борсука. Оно выполняется для произвольного клеточного подпространства.)

Наконец, изоморфизм 2 называется *изоморфизмом вырезания.* В более общей формулировке он состоит в следующем. Пусть (X, A) – топологическая пара и $B \subset A$ – подмножество, удовлетворяющее условию $\overline{B} \subset \operatorname{Int} A$. Тогда имеет место изоморфизм сингулярных гомологий

$$H_k(X, A) \simeq H_k(X \setminus B, A \setminus B).$$

Рассмотрим относительный цикл, представляющий некоторый класс гомологий $a \in H_k(X, A)$. Класс гомологий не изменится, если отбросить из этого цикла все сингулярные симплексы, целиком лежащие в A. Если оставшиеся в результате этого симплексы не пересекают B, то они задают класс относительных гомологий в $H_k(X \setminus B, A \setminus B)$. Таким образом, препятствием к доказываемому изоморфизму могут служить только сингулярные симплексы, имеющие общие точки как с B, так и с $X \setminus A$. От таких симплексов можно избавиться путем измельчения задающих данный класс гомологий симплексов.



Стандартный способ измельчения симплекса изображен на рисунке.

Вершинами нового разбиения служат центры всевозможных граней (всех размерностей) исходного симплекса. Симплексы нового разбиения соответствуют возрастающим последовательностям граней исходного симплекса. Построенное разбиение называется *барицентрическим*. Процедуру барицентрического разбиения можно итерировать. Повторив ее достаточно большое количество раз, мы получим гомологичный исходному цикл, в котором всякий сингулярный симплекс, имеющий общие точки с $X \setminus A$, не пересекается с B, и, следовательно, может рассматриваться как сингулярный симплекс в $X \setminus B$. Это завершает доказательство изоморфизма вырезания, а вместе с ним и теоремы.

4 Длинная точная последовательность пары

Со всякой парой топологических пространств (X, A) связаны три серии групп гомологий $H_k(X)$, $H_k(A)$ и $H_k(X, A)$. Связь между ними описывается следующей теоремой.

Теорема 4.1. *Имеет место длинная точная последовательность*

$$\begin{aligned} \ldots \longleftarrow H_{k-1}(A) \xleftarrow{\partial_*} H_k(X, A) \longleftarrow H_k(X) \longleftarrow \\ \longleftarrow H_k(A) \longleftarrow H_{k+1}(X, A) \longleftarrow \cdots . \end{aligned}$$

Гомоморфизмы $H_k(A) \to H_k(X)$ и $H_k(X) \to H_k(X, A)$ индуцируются соответствующими вложениями, а связывающий граничный гомоморфизм $\partial_* \colon H_k(X, A) \to H_{k-1}(A)$ определяется следующим образом. Рассмотрим относительный цикл a, представляющий данный класс относительных гомологий. Граница ∂a не обязана равняться нулю, но должна содержаться в A. Элемент ∂a, рассматриваемый как цикл в A, и представляет определяемый класс гомологий.

Напомним, что последовательность гомоморфизмов называется *точной*, если образ всякого предыдущего члена последовательности совпадает с ядром последующего. Например, точная последовательность

$$0 \leftarrow A \leftarrow B \leftarrow 0$$

есть просто обозначение того, что гомоморфизм $B \to A$ является изоморфизмом.

Короткой точной последовательностью называется последовательность вида
$$0 \leftarrow A \xleftarrow{p} B \xleftarrow{i} C \leftarrow 0.$$

Точность этой последовательности есть выражение того факта, что гомоморфизм i инъективен (т.е. C является подгруппой в B), гомоморфизм p сюръективен (т.е. A является факторгруппой группы B), и, более того, A является факторгруппой в точности по подгруппе $C \subset B$. В этом случае говорят, что B является *расширением* группы C при помощи группы A.

Утверждение теоремы является, по-существу, алгебраическим, и доказывать его мы будем алгебраическими методами. Пусть задан цепной комплекс $C_\bullet$ и его подкомплекс $C'_\bullet$. Обозначим через $C''_\bullet$ соответствующий факторкомплекс. Гомологии комплексов $C_\bullet$, $C'_\bullet$ и $C''_\bullet$ обозначены в теореме через $H_k(X)$, $H_k(A)$ и $H_k(X, A)$, соответственно. Эти комплексы укладываются в следующую большую диаграмму отображений, в которой каждый столбец точен:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots & C''_{k-1} \arrow[l] \arrow[u] & C''_k \arrow[l] \arrow[u] & C''_{k+1} \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C_{k-1} \arrow[l] \arrow[u, "p"] & C_k \arrow[l] \arrow[u, "p"] & C_{k+1} \arrow[l] \arrow[u, "p"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C'_{k-1} \arrow[l] \arrow[u, "i"] & C'_k \arrow[l] \arrow[u, "i"] & C'_{k+1} \arrow[l] \arrow[u, "i"] & \cdots \arrow[l] \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Приведем алгебраическую переформулировку определения связывающего граничного гомоморфизма $\partial_*\colon H_{k+1}(X, A) \to H_k(A)$. Рассмотрим цикл $a \in C''_{k+1}$, представляющий данный класс относительных гомологий. Из сюръективности p вытекает существование у a прообраза $b \in C_{k+1}$. Положим $c = \partial b$. Тогда $p(c) = p(\partial b) = \partial p(b) = \partial a = 0$. Поэтому c лежит в образе гомоморфизма i, и у него существует прообраз $d \in C'_k$. Элемент d замкнут.

Действительно, $i\partial d = \partial c = \partial^2 b = 0$, а поскольку i инъективно, из равенства $i\partial d = 0$ вытекает равенство $\partial d = 0$. Следовательно, цепь d является циклом. Представляемый ею класс гомологий и берется в качестве образа класса цикла a при гомоморфизме ∂_*. Еще нужно проверить независимость приведенного определения от произвола в конструкции. Все это нетрудно проверяется при помощи аналогичныых рассуждений, имеющих название «метод диаграммного поиска». Рассуждения удобно сопровождать выписыванием диаграммы следующего вида

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & a \arrow[l, mapsto] \\
0 & c \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto, "p"'] & b \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto, "p"'] \\
0 \arrow[u, mapsto, "i"'] & d \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto, "i"']
\end{tikzcd}$$

Доказательство точности последовательности теоремы в каждом ее члене проводится тем же методом и оставляется слушателям в качестве (обязательного и очень полезного) упражнения.

Задача 4.2. Докажите теорему.

В длинной точной последовательности пары вместо обычных гомологий пространств X и A можно использовать *приведенные*. Соответствующая последовательность также будет точна. Некоторым обобщением точной последовательности пары является *точная последовательность тройки* пространств $B \subset A \subset X$. В этой последовательности участвуют относительные гомологические группы $H_k(X, A)$, $H_k(X, B)$ и $H_k(A, B)$.

Задача 4.3. Выпишите и обоснуйте длинную точную последовательность приведенных гомологий пары и длинную точную последовательность тройки.

Рассмотрим для примера длинную точную последовательность приведенных гомологий пары (B^n, S^{n-1}), состоящей из n-мерного шара и его границы. В этой последовательности участвуют гомологии стягиваемого пространства B^n, которые тривиальны. Кроме того, факторпространство B^n/S^{n-1} гомеоморфно n-мерной сфере, поэтому данная точная последовательность позволяет вычислить (сингулярные) гомологии сферы индукцией по размерности. Единственный нетривиальный кусок этой последовательности имеет вид

$$\ldots \longleftarrow 0 \longleftarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \xleftarrow{\partial_*} H_n(B^n, S^{n-1}) \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots .$$

Поэтому мы по индукции заключаем, что $H_n(S^n) \simeq H_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$, а все остальные (приведенные) гомологии сферы тривиальны.

Обобщая этот пример, рассмотрим длинную точную последовательность пары (CX, X), где CX – конус над некоторым клеточным пространством X, которое вложено в свой конус в виде основания. Факторпространство

$$\Sigma X = CX/X$$

называется *надстройкой* пространства X. Поскольку конус стягиваем и имеет тривиальные гомологии, длинная точная последовательность пары (CX, X) сводится к точным фрагментам вида

$$0 \longleftarrow \overline{H}_{k-1}(X) \xleftarrow{\partial_*} \overline{H}_k(\Sigma X) \longleftarrow 0,$$

откуда мы получаем *изоморфизм надстройки*

$$\overline{H}_k(\Sigma X) \simeq \overline{H}_{k-1}(X).$$

Имеется вариант определения надстройки, который отличается от приведенного выше дополнительным стягиванием одной выделенной образующей конуса. Этот вариант надстройки гомотопически эквивалентен приведенному выше, но имеет более удобную клеточную структуру: его клетки (за исключением одной выделенной нульмерной) находятся во взаимно однозначном соответствии с клетками исходного пространства X со сдвигом размерности на 1. Более того, весь цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий надстройки получается из клеточного комплекса исходного пространства простым сдвигом градуировки на один. Так что с точки зрения клеточных гомологий изоморфизм надстройки очевиден: он сопоставляет всякому циклу в X надстройку этого цикла в ΣX.

Мы выразили изоморфизм надстройки через связывающий граничный оператор длинной точной последовательности пары. Оказывается, и обратно, связывающий граничный оператор длинной точной последовательности произвольной клеточной пары (X, A) можно выразить через изоморфизм надстройки (и обычные гомоморфизмы прямого образа). Действительно, рассмотрим пространство $Y = X \cup_A CA$, получаемое приклеиванием к X конуса над A вдоль его основания. Поскольку конус стягиваем, пространство Y гомотопически эквивалентно пространству $Y/CA = X/A$. С другой стороны, стягивание подпространства $X \subset Y$ индуцирует гомоморфизм

$$H_k(X/A) = H_k(Y) \longrightarrow H_k(Y/X) = H_k(\Sigma A).$$

Композиция построенного гомоморфизма $H_k(X/A) \to H_k(\Sigma A)$ с изоморфизмом надстройки $H_k(\Sigma A) \simeq H_{k-1}(A)$ совпадает с гомоморфизмом $H_k(X/A) \to H_{k-1}(A)$ из длинной точной последовательности пары (X, A).

Более того, рассмотрим длинную точную последовательность пары (Y, X) и сравним ее с длинной точной последовательностью пары (X, A):

$$\begin{tikzcd}
\cdots & H_k(\Sigma A) \arrow[l] \arrow[d, equals] & H_k(Y) \arrow[l] \arrow[d, equals] & H_k(X) \arrow[l] \arrow[d, equals] & H_{k+1}(\Sigma A) \arrow[l] \arrow[d, equals] & H_{k+1}(Y) \arrow[l] \arrow[d, equals] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & H_{k-1}(A) \arrow[l] & H_k(X, A) \arrow[l] & H_k(X) \arrow[l] & H_k(A) \arrow[l] & H_{k+1}(X, A) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Мы видим, что длинная последовательность пары (Y, X) – эта та же последовательность пары (X, A), в которой роль групп гомологий пространства, подпространства и факторпространства циклически переставляются. Приведенную конструкцию можно итерировать. Таким образом, в длинной точной последовательности пары участвует три серии групп гомологий, но выбор того, какие из этих гомологий относятся к пространству, подпространству и факторпространству, довольно условный.

Отметим в заключение, что для произвольного непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ гомоморфизм прямого образа $f_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$ может быть включен в длинную точную последовательность. Действительно, при помощи гомотопической эквивалентности всякое отображение может быть превращено во вложение. Например, пространство Y можно заменить на гомотопически ему эквивалентное пространство $\widetilde{Y}$, получаемое приклеиванием к Y цилиндра над X вдоль его нижнего основания посредством отображения f, а отображение f заменить на вложение $X \hookrightarrow \widetilde{Y}$ в качестве верхнего основания. Таким образом, третьим недостающим членом рассматриваемой длинной точной последовательности выступают гомологии пространства $\widetilde{Y}/X = Y \cup_f CX$.

5 Лемма о пяти гомоморфизмах

Рассмотрим клеточную пару (X, A). Пусть гомологии двух из трех пространств X, A, X/A известны. В какой мере длинная точная последовательность определяет гомологии третьего пространства? Пусть, для определенности, мы пытаемся вычислить относительные гомологии $H_n(X, A)$ исходя из известных гомологий пространств X и A. Прежде всего, помимо самих этих гомологий, необходимо знать еще связывающий их гомоморфизм $i_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$, индуцированный вложением $i\colon X \to Y$. Тогда длинная точная последовательность задает в $H_n(X, A)$ подгруппу K_n и факторгруппу Q_n по этой подгруппе, т.е. имеет место короткая точная последовательность

$$0 \longleftarrow Q_n \longleftarrow H_n(X, A) \longleftarrow K_n \longleftarrow 0.$$

Действительно, в качестве K_n выступает образ гомоморфизма $H_n(X) \to H_n(X, A)$, изоморфный коядру (фактору по образу) известного гомоморфизма $H_n(A) \to H_n(X)$, а в качестве Q_n выступает образ гомоморфизма $H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$, равный ядру известного гомоморфизма $H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X)$.

Иногда средний член короткой точной последовательности восстанавливается по ее крайним членам однозначно с точностью до изоморфизма. Например, если участвующие в этой последовательности группы K_n, Q_n и $H_n(X, A)$ являются векторными пространствами над некоторым полем (конечным или бесконечным), то размерность $H_n(X, A)$ равна сумме размерностей K_n и Q_n. Аналогично, ранг свободной части группы $H_n(X, A)$ равен сумме рангов свободных частей групп K_n и Q_n. Однако в общем случае при восстановлении группы $H_n(X, A)$ остается еще некоторый произвол в определении кручения.

Задача 5.1. Какими могут быть абелевы группы G и H, участвующие в коротких точных последовательностях

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow G \longleftarrow \mathbb{Z}_2 \longleftarrow 0, \qquad 0 \longleftarrow \mathbb{Z}_2 \longleftarrow H \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow 0?$$

Оказывается, что произвола в определении группы $H_n(X, A)$ можно избежать, если для нее имеется «естественный кандидат».

Предложение 5.2. *Пусть заданы пары (X, A) и (Y, B) и непрерывное отображение f между ними, т.е. отображение*

$f\colon X \to Y$, такое, что $f(A) \subset B$. Предположим, что f индуцирует изоморфизмы $H_k(X) \to H_k(Y)$ и $H_k(A) \to H_k(B)$ для двух соседних значений $k = n, n-1$. Тогда f индуцирует также изоморфизм $H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

Алгебраической переформулировкой этого предложения служит следующее утверждение, называемое **леммой о пяти гомоморфизмах**, или **5-леммой**.

Лемма 5.3. *Пусть задан гомоморфизм двух пятичленных точных последовательностей абелевых групп:*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "1^\circ"] & A_2 \arrow[l] \arrow[d, "2^\circ"] & A_3 \arrow[l] \arrow[d, "3^\circ"] & A_4 \arrow[l] \arrow[d, "4^\circ"] & A_5 \arrow[l] \arrow[d, "5^\circ"] \\
B_1 & B_2 \arrow[l] & B_3 \arrow[l] & B_4 \arrow[l] & B_5 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Предположим, что гомоморфизмы 1°, 2°, 4°, и 5° являются изоморфизмами. Тогда и гомоморфизм 3° также является изоморфизмом.

Доказательство этой леммы является отличным упражнением на применение метода диаграммного поиска.

Задача 5.4. В лемме имеется два утверждения (инъективность и сюръективность гомоморфизма 3°) и 8 предпосылок (инъективность и сюръективность остальных четырех гомоморфизмов). В действительности, из этих восьми предпосылок три используются для доказательства инъективности, три используются для доказательства сюръективности, а две не используются вообще. Восстановите точные условия для инъективности и, соответственно, сюръективности гомоморфизма 3°.

6 Последовательность и принцип Майера–Вьеториса

Последовательность Майера–Вьеториса используется в случае, когда пространство X представлено в виде объединения двух своих подпространств, $X = A \cup B$. В ней участвуют гомологии пространств X, A, B и $A \cap B$.

Теорема 6.1. *Имеет место длинная точная последовательность*

$$\cdots \leftarrow H_k(A) \oplus H_k(B) \leftarrow H_k(A \cap B) \leftarrow H_{k+1}(X) \leftarrow \\ \leftarrow H_{k+1}(A) \oplus H_{k+1}(B) \leftarrow \cdots .$$

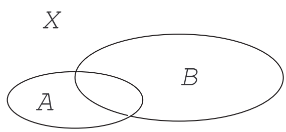
Гомоморфизмы $H_k(A \cap B) \to H_k(A) \oplus H_k(B)$ и $H_k(A) \oplus H_k(B) \to H_k(X)$ индуцируются вложениями подпространств $A \cup B \subset A$, $A \cup B \subset B$, $A \subset X$ и $B \subset X$. Нужно только в одном из четырех соответствующих гомоморфизмов поставить знак «минус» для обеспечения точности в члене $H_k(A) \oplus H_k(B)$.

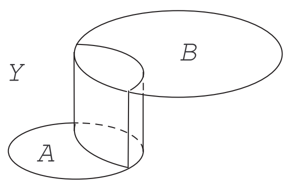
Для определения гомоморфизма $H_{k+1}(X) \to H_k(A \cap B)$ представим цикл u, задающий данный класс гомологий $[u] \in H_{k+1}(X)$, в виде суммы двух цепей $u = v_1 + v_2$ таким образом, что v_1 имеет носитель в A, а v_2 имеет носитель в B. Тогда образ класса $[u]$ в группе $H_k(A \cap B)$ задается циклом $\partial v_1 = -\partial v_2$. Более формально, этот гомоморфизм определяется как композиция гомоморфизмов

$$H_{k+1}(X) \to H_{k+1}(X, B) \simeq H_{k+1}(A, A \cap B) \to H_k(A \cap B),$$

в которой крайние гомоморфизмы взяты длинных точных последовательностей пар (X, B) и $(A, A \cap B)$, а средний – изоморфизм вырезания.

Доказательство точности последовательности Майера–Веториса несложно провести, проверяя непосредственно ее точность в каждом члене. Однако имеется более концептуальный подход, который позволяет свести ее к случаю точной последовательности пары. Предположим, что X, A и B являются клеточными пространствами (или гомотопически им эквивалентны). Рассмотрим пространство Y, получаемое из цилиндра $(A \cap B) \times [0, 1]$ приклеиванием пространства A к нижнему основанию цилиндра и пространства B к верхнему основанию, см. рис.





Стягивание образующих цилиндра задает гомотопическую эквивалентность пространств X и Y. После такого преобразования A и B превращаются в непересекающиеся подпространства. Длинная точная последовательность пары $(Y, A \sqcup B)$ и есть искомая последовательность Майера–Вьеториса. Помимо групп $H_k(Y) = H_k(X)$, $H_k(A \sqcup B) = H_k(X) \oplus H_k(Y)$ в этой последовательности участвуют гомологии факторпространства $Y/(A \sqcup B)$, которое получается из надстройки над $A \cap B$ отождествлением двух выделенных точек. Такое пространство гомотопически эквивалентно букету надстройки над $A \cap B$ и окружности, или надстройке над несвязным объединением $A \cap B$ и точки. Поэтому имеет место изоморфизм надстройки

$$H_k(Y, A \sqcup B) \simeq H_{k-1}(A \cap B),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Обычно последовательность Майера–Вьеториса используется не для вычислений гомологий конкретных пространств, а для доказательства общих утверждений: из выполнения определенных свойств для подпространств A, B и $A \cap B$ по индукции с использованием этой последовательности выводится выполнение соответствующего свойства для $A \cup B$. Эти рассуждения носят название *принципа Майера–Вьеториса.* Продемонстрируем применение этого принципа на примере доказательства следующей теоремы.

Теорема 6.2. *Симплициальные гомологии симплициальных множеств изоморфны сингулярным.*

Доказательство. Всякий симплекс симплициального разбиения можно рассматривать как сингулярный. Следовательно, мы имеем гомоморфизм цепных комплексов, вычисляющих симплициальные и сингулярные гомологии, соответственно, и требуется установить, что этот гомоморфизм индуцирует изоморфизм гомологий. Из последовательности Майера–Вьеториса и леммы о пяти гомоморфизмах вытекает, что если указанное свойство выполняется для симплициальных подпространств A, B и $A \cap B$, то оно выполняется и для подпространства $A \cup B$ симплициального пространства X. Индукцией по числу симплексов мы получаем доказательство выполнения указанного свойства для всего X.

Начальным шагом индукции служит вычисление гомологий одного симплекса, которые изоморфны гомологиям точки в обеих теориях.

7 Аксиоматический подход к построению теории гомологий

Перечислим основные свойства, которым удовлетворяют сингулярные гомологии. Для определенности, мы будем рассматривать только клеточные пространства и подпространства. Всякой клеточной паре (X, A) мы сопоставили последовательность абелевых групп $H_k(X, A)$ $(k \geqslant 0)$. В частности, мы полагаем $H_k(X) = H_k(X, \varnothing)$. Кроме того, мы построили гомоморфизмы $\partial_*\colon H_k(X, A) \to H_{k-1}(A)$ и для всякого отображения пар $f : (X, A) \to (Y, B)$ гомоморфизмы $f_*\colon H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$. При этом выполняются следующие свойства (аксиомы).

1. Функториальность. $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $f_* \circ \partial_* = \partial_* \circ f_*$.

2. Гомотопическая инвариантность. $f \sim g \Rightarrow f_* = g_*$

3. Длинная точная последовательность пары.

4. Свойство факторизации. $H_k(X, A) \simeq H_k(X/A, \mathrm{pt}) = \overline{H}(X/A)$.

5. Гомологии точки. $H_0(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$, $H_k(\mathrm{pt}) = 0$ $(k > 0)$.

Имеется подход к теории гомологий, в котором перечисленные свойства принимаются в качестве аксиом. Оказывается, перечисленные аксиомы полностью определяют гомологии, по крайней мере, клеточных пространств. Заметим, что непротиворечивость приведенной системы аксиом вытекает из существования конкретной модели – сингулярных гомологий.

Теорема 7.1. *Любая теория гомологий, удовлетворяющая перечисленным аксиомам, совпадает для клеточных пространств с теорией сингулярных гомологий.*

Доказательство состоит в предъявлении явного алгоритма, приводящего к вычислению гомологий клеточного пространства и использующего только перечисленные аксиомы. Как мы увидим, этот алгоритм сведется к вычислению клеточных гомологий. Тем самым, мы докажем теорему, а заодно, корректность определения клеточных гомологий и их изоморфизм с сингулярными.

На первом шаге мы вычислим с использованием изоморфизма надстройки или напрямую по индукции при помощи длинной точной последовательности пары (B^n, S^{n-1}) гомологии сферы, а также букета сфер:

$$\overline{H}^k\left(\bigvee_{i=1}^{m} S^n\right) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^m, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Далее, для всякого клеточного пространства X мы положим

$$C_k = C_k(X) = H^k(\mathrm{sk}^k / \mathrm{sk}^{k-1}),$$

где $\mathrm{sk}^k = \mathrm{sk}^k(X)$ – его k-мерный остов. По построению, эта группа изоморфна $\mathbb{Z}^m$, где m – количество k-мерных клеток, т.е. изоморфна группе клеточных k-цепей. Определим гомоморфизм

$$\partial\colon C_{k+1} \to C_k$$

как связывающий граничный гомоморфизм из длинной точной последовательности тройки $(\mathrm{sk}^{k+1}, \mathrm{sk}^k, \mathrm{sk}^{k-1})$ (или, что эквивалентно, пары $(\mathrm{sk}^{k+1} / \mathrm{sk}^{k-1}, \mathrm{sk}^k / \mathrm{sk}^{k-1})$). Можно проверить, что приведенное гомологическое определение гомоморфизма ∂ совпадает с геометрически определенным граничным оператором из цепного комплекса клеточных гомологий. В результате мы построили последовательность гомоморфизмов

$$0 \longleftarrow C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \xleftarrow{\partial} \cdots .$$

Нам осталось показать, что гомоморфизм ∂ удовлетворяет равенству $\partial \circ \partial = 0$ и что гомологии построенного комплекса совпадают с гомологиями пространства X.

Изучим для начала, как изменяются гомологии пространства при добавлении к нему клеток. Пусть Y получается из X приклеиванием некоторого количества k-мерных клеток. Тогда Y/X гомеоморфно букету k-мерных сфер, и единственный нетривиальный фрагмент длинной точной последовательности пары (Y, X) выглядит следующим образом:

$$0 \leftarrow H_{k-1}(Y) \leftarrow H_{k-1}(X) \leftarrow H_k(Y/X) \leftarrow H_k(Y) \leftarrow H_k(X) \leftarrow 0.$$

Из этой последовательности мы заключаем, что при приклеивании k-мерных клеток k-мерные гомологии могут только увеличиться (за счет классов приклеиваемых клеток), $(k-1)$-мерные гомологии могут только уменьшиться (за счет новых соотношений, задаваемых границами приклеиваемых клеток), а в остальных размерностях гомологии не меняются.

В частности, n-мерные гомологии пространства не меняются при приклеивании к нему клеток размерности $> n+1$. По тем же соображениям, эти гомологии не меняются при стягивании клеток размерности $< n-1$. Иными словами, группа $H_n(X)$ определяется взаимным расположением клеток размерностей $n-1$, n и $n+1$:

$$H_n(X) \simeq H_n(\mathrm{sk}^{n+1} / \mathrm{sk}^{n-2}).$$

Дальнейшие рассуждения состоят в применении всевозможных длинных точных последовательностей различных пар и троек остовов разных размерностей. Для тройки $(\mathrm{sk}^n, \mathrm{sk}^{n-1}, \mathrm{sk}^{n-2})$ фрагмент этой последовательности имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n-1}(\mathrm{sk}^{n-1}/\mathrm{sk}^{n-2}) & \xleftarrow{\partial} & H_n(\mathrm{sk}^n/\mathrm{sk}^{n-1}) & \leftarrow & H_n(\mathrm{sk}^n/\mathrm{sk}^{n-2}) & \leftarrow & H_n(\mathrm{sk}^{n-1}/\mathrm{sk}^n) \\
\| & & \| & & & & \| \\
C_{n-1} & & C_n & & & & 0
\end{array}$$

Следовательно, группу $Z_n = H_n(\mathrm{sk}^n / \mathrm{sk}^{n-2})$ можно отождествить с подгруппой замкнутых цепей в построенном комплексе. Граничный оператор $\partial\colon C_{n+1} \to C_n$ раскладывается в композицию

$$\begin{aligned} C_{n+1} = H_{n+1}(\mathrm{sk}^{n+1}/ \mathrm{sk}^n) \xrightarrow{\partial_*} H_n(\mathrm{sk}^n/ \mathrm{sk}^{n-2}) \to \\ \to H_n(\mathrm{sk}^n/ \mathrm{sk}^{n-1}) = C_n, \end{aligned}$$

где гомоморфизм ∂_* взят из точной последовательности тройки $(\mathrm{sk}^{n+1}, \mathrm{sk}^n, \mathrm{sk}^{n-2})$. Следовательно, образ $\partial(C_{n+1})$ лежит в Z_n. Это доказывает равенство $\partial^2 = 0$. Наконец, из точной последовательности тройки $(\mathrm{sk}^{n+1}, \mathrm{sk}^n, \mathrm{sk}^{n-2})$

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n(\mathrm{sk}^{n+1}/ \mathrm{sk}^n) & \leftarrow & H_n(\mathrm{sk}^{n+1}/ \mathrm{sk}^{n-2}) & \xleftarrow{\partial} & H_n(\mathrm{sk}^n/ \mathrm{sk}^{n-2}) & \leftarrow & H_{n+1}(\mathrm{sk}^{n+1}/ \mathrm{sk}^n) \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
0 & & H_n(X) & & Z_n & & C_{n+1}
\end{array}$$

мы заключаем требуемое равенство $H_n(X) \simeq Z_n/\partial(C_{n+1})$.

Приведенные рассуждения выглядят несколько запутанными. В действительности, в них имеется удивительная стройность и естественность, но это нам будет понятно позже, после введения понятия спектральной последовательности.

8 Когомологии и гомологии с коэффициентами в абелевой группе

Теория когомологий получается из теории гомологий «обращением всех стрелок». Пусть задан цепной комплекс $(C_\bullet, \partial)$. Группой k-мерных *коцепей* называется пространство линейных функций на пространстве цепей,

$$C^k = \mathrm{Hom}(C_k, \mathbb{Z}).$$

Эти группы образуют *коцепной комплекс*

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} \cdots$$

в котором гомоморфизм δ, называемый *кограничным*, направлен в сторону увеличения градуировки и определяется как гомоморфизм, сопряженный граничному гомоморфизму. Более подробно, он задается равенством

$$(\delta\varphi)(a) = \varphi(\partial a).$$

Если группы цепей имеют вид $C_k = \mathbb{Z}^{d_k}$ для некоторых (конечных) d_k, то и группы коцепей C_k имеют такой же вид. При этом матрица оператора δ получается из матрицы оператора ∂ простым транспонированием.

Группы *замкнутых*, *точных коцепей* и *когомологии коцепного комплекса* определяются аналогично тому, как это делается в случае цепных комплексов. В случае, когда $(C_\bullet, \partial)$ – цепной комплекс, вычисляющий гомологии (симплициальные, сингулярные, или клеточные) топологического пространства X, когомологии соответствующего коцепного комплекса обозначаются через $H^n(X)$ и называются когомологиями пространства X. Все свойства, которые мы сформулировали для гомологий (функториальность, гомотопическая инвариантность, длинная точная последовательность пары и т.п.) выполняются и для когомологий. Нужно только во всех формулировках изменить направление всех стрелок на противоположное. В частности, для непрерывного отображения топологических пространств $f\colon X \to Y$ соответствующий гомоморфизм в когомологиях действует в обратном направлении,

$$f^*\colon H^n(Y) \to H^n(X)$$

и называется *гомоморфизмом обратного образа.*

Еще одной модификацией теории гомологий служат *гомологии и когомологии с коэффициентами в группе.* Если группы цепей и коцепей пространства X определяются как формальные линейные комбинации образующих с целыми коэффициентами, то соответствующие группы цепей и коцепей с коэффициентами в абелевой группе G определяются как формальные линейные комбинации тех же образующих с коэффициентами в группе G, а (ко)граничный оператор задается теми же матрицами, целочисленные компоненты которых интерпретируются как элементы группы G. Более формально, мы полагаем

$$C_k(G) = C_k \otimes G, \qquad C^k(G) = \mathrm{Hom}(C_k, G).$$

(Ко)гомологии получающихся комплексов обозначаются через $H_n(X;G)$ и $H^n(X;G)$, соответственно. Заметим, что группы (ко)гомологий с коэффициентами в G являются G-модулями.

Гомологии и когомологии тесно связаны между собой. Непосредственно из определения вытекает существование билинейного спаривания

$$H^n(X;G) \otimes H_n(X;G) \to G.$$

Задача 8.1. Предположим, что группы гомологий $H_n(X)$ конечно порождены. Докажите, что если G – поле, то векторные пространства $H_n(X;G)$ и $H^n(X;G)$ конечномерны и взаимно двойственны. В частности, они имеют одинаковую размерность (над G).

Задача 8.2. Предположим, что группы гомологий $H_n(X)$ конечно порождены. Докажите, что ранг свободной части групп $H_n(X)$ и $H^n(X)$ одинаков и равен размерности векторных пространств $H_n(X;G)$ и $H^n(X;G)$, где G – произвольное поле характеристики ноль, например, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Размерность над полем G

$$b_k = \dim_G H_k(X;G) = \dim_G H^k(X;G)$$

называется k-м *числом Бетти.* Числа Бетти зависят от выбора поля G. Обычно в качестве G берут $G = \mathbb{Q}$ (рациональные числа Бетти) или $G = \mathbb{Z}_2$ (mod2 числа Бетти).

Утверждение последней задачи имеет уточнение: спаривание между целочисленными (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$) гомологиями и когомологиями обращается в ноль на кручении, а на свободной части оно невырожденно (определитель соответствующей билинейной формы равен 1).

Таким образом, свободные части групп гомологий и когомологий легко выражаются друг через друга. С кручением дело обстоит несколько сложнее, но имеется следующее общее утверждение.

Теорема 8.3. *Предположим, что группы гомологий $H_n(X)$ конечно порождены. Тогда эти группы полностью определяют гомологии и когомологии с коэффициентами в произвольной абелевой группе G, с точностью до изоморфизма.*

Формулировка теоремы наводит на следующий вопрос: зачем вообще нужны гомологии и когомологии с коэффициентами в группе, если они выражаются через целочисленные? Дело в том, что обычно бывает удобнее исследовать свободную часть и кручение отдельно. Например, для некоторых однородных пространств (грассманианов, флаговых пространств и т.п.) удается независимо доказать, что группы (ко)гомологий имеют только 2-кручение. Для полного определения (ко)гомологий таких пространств достаточно вычислить их (ко)гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_2$, что существенно проще: и та, и другая группа является полем.

В общем случае верно следующее обращение теоремы: группы $H_n(X)$ однозначно с точностью до изоморфизма определяются группами $H_n(X, \mathbb{Q})$ и $H_n(X, \mathbb{Z}_{p^k})$ для всевозможных простых p и натуральных k.

Доказательство теоремы состоит в выводе явной формулы (так называемой **формулы универсальных коэффициентов**) для групп $H_n(X; G)$ и $H^n(X; G)$ через известные группы $H_n(X)$. Точная ее формулировка требует привлечения техники теории расширений и гомологической алгебры. Я ее приводить не буду, ограничившись лишь описанием алгоритма для определения (ко)гомологий с коэффициентами в G и рядом следствий из него.

Из формулировки теоремы вытекает, что для вычисления групп $H_n(X; G)$ и $H^n(X; G)$ достаточно предъявить произвольный комплекс, группы (целочисленных) гомологий которого изоморфны $H_n(X)$. Тогда в силу универсальности (ко)гомологии полученного комплекса с коэффициентами в G будут изоморфными соответствующим (ко)гомологиям пространства X.

Чтобы смоделировать прямое слагаемое вида $\mathbb{Z}$ в группе $H_n(X)$, достаточно рассмотреть комплекс

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow 0.$$

(Ко)гомологии этого комплекса с коэффициентами в G изоморфны группе G в градуировке n. Таким образом, свободная часть группы $H_n(X)$ дает прямое слагаемое в группах $H_n(X;G)$ и $H^n(X;G)$, являющееся свободным G-модулем того же ранга.

Чтобы смоделировать слагаемое $\mathbb{Z}_p \subset H_n(X)$, где p – простое или степень простого числа, достаточно рассмотреть комплекс

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{p} \mathbb{Z} \longleftarrow 0,$$

в котором средний гомоморфизм задается умножением на p. Если, например, $G = \mathbb{Z}_q$, где q взаимно просто с p, то (ко)гомологии этого комплекса с коэффициентами в G тривиальны. Посмотрим, как устроены его (ко)гомологии с коэффициентами в $G = \mathbb{Z}_p$.

$$\begin{tikzcd}
k & H_k(X,\mathbb{Z}) & H_k(X,\mathbb{Z}_p) & H^k(X,\mathbb{Z}_p) & H^k(X,\mathbb{Z}) \\
n & \mathbb{Z}_p \arrow[r, "j"] & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \arrow[dr, "\beta"] & 0 \\
n+1 & 0 & \mathbb{Z}_p \arrow[ul, "\beta"'] & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \arrow[l, "j"']
\end{tikzcd}$$

Из таблицы видно, что каждое слагаемое вида $\mathbb{Z}_p$ группы $H_n(X)$ «раздваивается» в $\mathbb{Z}_p$-(ко)гомологиях, а в целочисленных когомологиях оно дает такой же вклад $\mathbb{Z}_p$, но в соседней градуировке.

Следствие 8.4. *Группы кручения n-мерных гомологий и $(n+1)$-мерных (целочисленных) когомологий изоморфны,*

$$\mathrm{Tors}_n \simeq \mathrm{Tors}^{n+1}.$$

Надо отметить, что никакими функториальными свойствами этот изоморфизм не обладает.

Вот еще один вывод из проведенных вычислений. Рассмотрим гомоморфизм $j\colon H_n(X) \otimes G \to H_n(X;G)$, действующий на коэффициенты цепей естественным гомоморфизмом $\mathbb{Z} \to G$. Этот гомоморфизм инъективен, а его образ в случае $G = \mathbb{Z}_p$ характеризуется как *ядро гомоморфизма Бокштейна* β, действие которого изображено в таблице.

Определение гомоморфизма Бокштейна состоит в следующем. Рассмотрим k-цикл a, задающий класс $\mathbb{Z}_p$-гомологий пространства X. Коэффициенты этой цикла – вычеты по модулю p. Выберем у каждого вычета целочисленный представитель и обозначим полученную целочисленную цепь через $\tilde{a}$. Цепь $\partial\tilde{a}$ не обязана обращаться в ноль, но у нее все коэффициенты должны делиться на p. Цикл $\frac{1}{p}\partial\tilde{a}$ и задает образ класса $[a]$ при гомоморфизме Бокштейна. Условно гомоморфизм Бокштейна можно задать формулой

$$\beta = \frac{1}{p}\,\partial\colon H_k(X, \mathbb{Z}_p) \to H_{k-1}(X, \mathbb{Z}).$$

Аналогично, группа $H^n(X; G)$, как правило, «больше», чем группа $\mathrm{Hom}(H_n(X), G)$ линейных G-значных функций на гомологиях, и отличие этих двух групп описывается в терминах когомологического гомоморфизма Бокштейна.

9 Умножение в когомологиях

На первый взгляд, различие между гомологиями и когомологиями формальное, в направлении стрелок. Однако имеется причина, по которой когомологии все же обладают преимуществом. Эта причина заключается в том, что на них имеется кольцевая структура. Предположим, что группа G коэффициентов является кольцом. *Умножение в когомологиях* $H^*(X; G)$ определяется следующим образом. Пусть X – клеточное пространство. Тогда клеточное разбиение $X = \bigcup \sigma_\alpha$ этого пространства задает естественное клеточное разбиение $X \times X = \bigcup \sigma_\alpha \times \sigma_\beta$ его декартова квадрата. Зададим гомоморфизм

$$H^*(X; G) \otimes H^*(X; G) \to H^*(X \times X; G), \qquad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \times \psi$$

на клеточных коцепях явной формулой

$$\varphi \times \psi\,(\sigma_\alpha \times \sigma_\beta) = (-1)^{\deg\psi \deg\alpha}\,\varphi(\sigma_\alpha) \cdot \psi(\sigma_\beta).$$

Умножение $H^*(X; G) \otimes H^*(X; G) \to H^*(X; G)$ задается композицией $\times$-умножения, определенного выше, и гомоморфизма $H^*(X \times X; G) \to H^*(X; G)$, заданного вложением диагонали

$X \to X \times X$. Произведение классов a и b традиционно обозначается как $a \smile b$, однако сейчас все чаще символ произведения опускается и пишут просто $a\,b$.

Несмотря на простоту определения, пользоваться им не так-то легко. Вложение диагонали не является клеточным отображением, и для вычисления индуцируемого отображения в когомологиях приходится либо искать клеточную аппроксимацию диагонльного вложения, либо измельчать клеточное разбиение с тем, чтобы диагональ стала клеточным подпространством. В любом случае, знание одного только цепного клеточного комплекса недостаточно для вычисления умножения. Например, у комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ в стандартном клеточном разбиении присутствуют только клетки четных размерностей и все дифференциалы нулевые, однако умножение, как мы скоро увидим, далеко не тривиальное.

Каноническое клеточное подразбиение произведения $X \times X$, включающее диагональ, имеется в случае, когда клеточное пространство X является симплициальным. Поэтому для симплициальных гомологий, в отличие от клеточных, умножение можно задать явной формулой прямо на коцепях. Опуская вычисления, я сформулирую окончательный ответ: если φ является k-коцепью, а ψ – m-коцепью, то $(k+m)$-коцепь $\varphi \smile \psi$ задается формулой

$$\varphi \smile \psi\,(\Delta_{v_0,\ldots,v_{k+m}}) = \varphi(\Delta_{v_0,\ldots,v_k}) \cdot \psi(\Delta_{v_k,\ldots,v_{k+m}}).$$

Приведенную формулу можно применить и для сингулярных когомологий, если симплексы в ней заменить соответствующим образом на сингулярные симплексы.

Корректность и эквивалентность всех трех определений умножения (для клеточных, симплициальных и сингулярных гомологий) проверяется напрямую и я опускаю доказательство. Столь же легко проверяются и следующие свойства умножения.

Теорема 9.1. *Умножение в когомологиях градуированно, функториально по отношению к взятию обратного образа, билинейно, ассоциативно и градуированно коммутативно в следующем смысле*:

$$\varphi \smile \psi = (-1)^{\deg\varphi\deg\psi}\psi \smile \varphi.$$

В отличие от гомоморфизма обратного образа, граничный оператор $\delta^*\colon H^k(A;G) \to H^{k+1}(X,A;G)$ из длинной точной последовательности пары никакими особыми мультипликативными свойствами не обладает. Более того, имеет место следующее утверждение.

Задача 9.2. Если пространство X является чьей-либо надстройкой, то умножение в $H^*(X;G)$ тривиальное. (Указание: покажите, что диагональное вложение $X \to X \times X$ гомотопно отображению в току).

Хотя формально это и не используется в определении умножения, полезно представлять себе все же, насколько близки (ко)гомологии декартова произведения пространств к тензорному произведению (ко)гомологий сомножителей. И в гомологиях, и в когомологиях имеются естественные гомоморфизмы (направленные, заметьте, в одну сторону)

$$H^*(X;G) \otimes H^*(Y;G) \longrightarrow H^*(X \times Y;G),$$
$$H_*(X;G) \otimes H_*(Y;G) \longrightarrow H_*(X \times Y;G).$$

(Тензорные произведения в левой части рассматриваются в смысле градуированных G-модулей.)

Задача 9.3. Докажите, что если группа G является полем, то указанные гомоморфизмы являются изоморфизмами.

Изоморфизм задачи является частным случаем **формулы Кюннета**, описывающей (ко)гомологии произведений пространств. Он имеет место также и для целочисленных (ко)гомологий в случае, если кручение отсутствует или если изоморфизм рассматривается с точностью до кручения. Кручение в (ко)гомологиях декартова произведения также определяется кручением в сомножителях, однако это выражение более сложное и мы его не приводим. (Для каждого конкретного случая кручение можно определить тем же методом, которым мы подменяли формулу универсальных коэффициентов).

Отметим, что в случае когомологий гомоморфизм формулы Кюннета является мультипликативным и описывает кольцевую структуру на произведении сомножителей.

Пример 9.4. Рассмотрим следующие два пространства: $X = S^m \times S^n$ и Y, заданное как букет трех сфер размерностей m, n

и $m+n$. Оба пространства разбиваются на 4 клетки одинаковых размерностей. Следовательно, аддитивная структура когомологий у них одинакова: в них имеется три аддитивные образующие a, b и c размерностей m, n и $m+n$, соответственно. Однако умножение в когомологиях отличается. Для произведения X мы имеем $a\,b = c$, а для букета Y умножение тривиальное (почему?).

Большое количество содержательных примеров мы рассмотрим при изучении когомологий многообразий, а пока я ограничусь рассмотрением еще только одного.

Пример 9.5 инвариант Хопфа. Рассмотрим клеточное пространство X, состоящее из трех клеток размерностей 0, 2 и 4. Двумерная клетка приклеивается к нульмерной однозначно, в результате получается двумерная сфера. Поэтому гомотопический тип этого пространства задается гомотопическим классом отображения $\varphi : S^3 \to S^2$ приклеивания границы четырехмерной клетки к двумерному остову.

Классы таких отображений нумеруются элементами группы $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$. Соответствующий целочисленный инвариант, различающий гомотопические классы отображений $S^3 \to S^2$, называется *инвариантом Хопфа.* Определяется он следующим образом. Без ограничения общности, можно считать, что отображение φ гладко (согласно **теореме Вейерштрасса**, всякое непрерывное отображение многообразий можно аппроксимировать гомотопным ему гладким отображением). Тогда для общих значений a и b слои $\varphi^{-1}(a)$ и $\varphi^{-1}(b)$ являются гладкими ориентированными кривыми. Их индекс зацепления и берется в качестве инварианта Хопфа.

Напомним, что *индексом зацепления* двух замкнутых ориентированных кривых в S^3 называется индекс пересечения одной из этих кривых с произвольной замкнутой поверхностью, имеющей вторую кривую в качестве границы.

Я хочу привести интерпретацию инварианта Хопфа при помощи умножения в гомологиях. Обозначим через a и b образующие групп $H^2(X)$ и $H^4(X)$, соответственно, отвечающие единственным клеткам в этих размерностях. Тогда класс a^2 является элементом группы $H^4(X)$, а следовательно, он пропорционален классу b,

$$a^2 = k\,b \in H^4(X).$$

Я утверждаю, что *коэффициент пропорциональности k равен инварианту Хопфа.*

Доказательство этого утверждения не вполне прямое. Показывается, что оба определения инварианта Хопфа аддитивны в смысле групповой операции на $\pi_3(S^2)$, и принимают равные значения 1 для случая $X = \mathbb{C}P^2$. Интересно было бы получить прямое вычисление умножения в X в терминах геометрии характеристического отображения φ.

В заключение этого пункта я хочу привести одно обобщение, или, скорее, уточнение понятия умножения в когомологиях. Кольцевая структура имеется в относительных когомологиях $H^*(X, A)$. Определение этого умножения повторяет дословно соответствующее определение для абсолютных когомологий. Более того, для всяких двух подпространств A и B пространства X имеет место билинейное спаривание

$$H^*(X, A) \otimes H^*(X, B) \to H^*(X, A \cup B).$$

Его существование вытекает из того, что $\times$-произведение коцепей, обращающихся в ноль на A и B, соответственно, обращается в ноль на $A \times X \cup X \times B \subset X \times X$. Прообразом же этого подпространства при диагональном вложении $X \to X \times X$ является объединение подпространств A и B. Важно отметить, что это спаривание *не сводится* к умножению в когомологиях одного пространства или пары пространств.

Пример 9.6. Для произвольного клеточного пространства X рассмотрим гомотопически ему эквивалентное пространство $Y = X \times [0, 1]$ и его подпространство $A = X \times \{0\} \cup \{*\} \times [0, 1] \cup X \times \{1\}$. Тогда мы имеем умножение

$$H^*(Y) \otimes H^*(Y, A) \to H^*(Y, A).$$

Факторпространство Y/A – это надстройка пространства X. Поэтому приведенное умножение можно записать также в виде

$$H^*(X) \otimes H^*(\Sigma X) \to H^*(\Sigma X).$$

При изоморфизме надстройки $H^k(\Sigma X) \simeq \overline{H}^{k-1}(X)$ построенное умножение соответствует обычному умножению в $H^*(X)$. Мы видим, что хотя умножение в когомологиях надстройки тривиально, след от умножения в когомологиях исходного пространства X сохраняется в приведенной структуре $H^*(X)$-модуля в $H^*(\Sigma X)$.

10 Гомологии многообразий

В случае, когда топологическое пространство X является гладким многообразием, для изучения его гомологий имеется ряд дополнительных методов, неприменимых в общей ситуации. Все эти методы объединяются общим названием «двойственность Пуанкаре».

Вот простейшая формулировка этой двойственности. Пусть X – компактное ориентированное гладкое n-мерное многообразие без края. Тогда его *дополнительные числа Бетти равны между собой*

$$b_k = b_{n-k}$$

для произвольного поля коэффициентов. Более точная формулировка, справедливая с учетом кручения, состоит в следующем.

Теорема 10.1. *Пусть X – компактное ориентированное гладкое n-мерное многообразие без края. Тогда при всех k имеет место изоморфизм*

$$H_k(X) \simeq H^{n-k}(X).$$

Если многообразие не обязательно ориентированное, то аналогичный изоморфизм имеет место в гомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

Прежде, чем приводить доказательство, я сформулирую ряд геометрически очевидных общих утверждений о многообразиях, строгое доказательство которых требует, однако, довольно большой технической работы, которую я пропускаю.

Теорема 10.2. 1. *На всяком C^1-гладком многообразии можно ввести структуру C^∞-гладкого многообразия однозначно с точностью до (бесконечно гладкого) диффеоморфизма.*

2. *На всяком гладком многообразии существует клеточное, и даже симплициальное разбиение, все клетки которого являются гладкими подмногообразиями (симплициальное разбиение на многообразии называется его* триангуляцией*).*

3. *Пусть на гладком многообразии X имеется полуалгебраическое подмножество A, т.е. подмножество, которое в окрестности каждой точки задается в подходящих координатах системой алгебраических уравнений и неравенств. Тогда на X имеется гладкое клеточное разбиение, в котором A является объединением некоторого числа клеток.*

4. *Всякое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ гладких многообразий аппроксимируется сколь угодно C^0-близким ему гомотопным гладким отображением. Более того, аппроксимацию отображения f всегда можно выбрать трансверсальной по отношению к заданному подмногообразию в Y или к его заданному гладкому клеточному разбиению.*

Ввиду этих свойств мы будем предполагать всякое рассматриваемое многообразие бесконечно гладким, а всякое отображение (например, задающее сингулярный симплекс) бесконечно дифференцируемым.

При строгом обосновании этих утверждений проявляются некоторые тонкости. Например, для справедливости последнего утверждения необходимо предполагать некоторое условие регулярности примыкания клеток, чтобы исключить конфигурации вроде «бесконечной спирали». Это условие формализуются в понятии «стратификации Уитни», точное определение которого я опущу. Разбиения, о которых говорится в утверждениях 2 и 3, всегда можно выбрать удовлетворяющими этому условию.

Условие трансверсальности отображения $f\colon X \to Y$ по отношению к гладкому подмногообразию $M \subset Y$ состоит в том, что для каждой пары точек $x \in X$ и $y \in M \subset Y$, таких что $y = f(x)$ образ $f_* T_x X$ касательного пространства к X с касательным пространством $T_y M$ подмногообразия M вместе порождают касательное пространство $T_y Y$ ко всему многообразию Y,

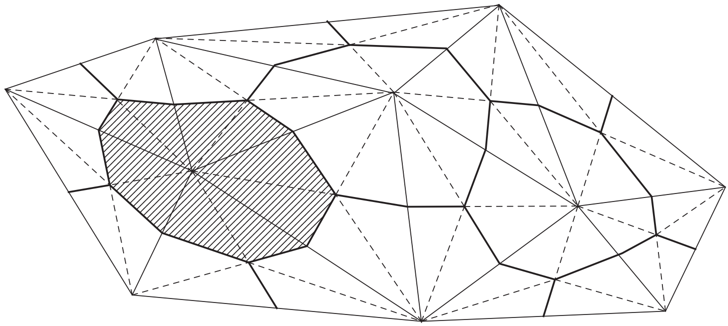
$$f_* T_x X + T_y M = T_y Y.$$

По **теореме о неявной функции**, при выполнении условия трансверсальности прообраз $L = f^{-1}(M)$ является гладким подмногообразием в X, причем

$$\operatorname{codim}_X L = \operatorname{codim}_Y M.$$

Вернемся теперь к доказательству теоремы 10.1. Выберем на X триангуляцию, и сопоставим каждой вершине ее *звезду*, составленную из примыкающих симплексов первого барицентрического разбиения, см. рисунок.

В результате мы получаем новое клеточное разбиение на X, *которое уже не является симплициальным.* Построенные два клеточных разбиения *двойственны*: имеется взаимно однозначное соответствие между k-мерными симплексами первого и



$(n-k)$-мерными клетками второго. Следовательно, группа клеточных k-цепей первого изоморфна группе клеточных $(n-k)$-коцепей второго. Сравнивая коэффициенты инцидентности, можно убедиться, что весь цепной комплекс первого клеточного разбиения изоморфен коцепному комплексу второго, с заменой градуировки k на $n-k$. А поскольку группы гомологий и когомологий не зависят от выбора клеточного разбиения, мы получаем изоморфизм теоремы.

Еще один способ построения двойственных клеточных разбиений основан на теории Морса, с которой мы познакомимся позднее.

Следствие 10.3. *Старшая группа гомологий $H_n(X)$ компактного ориентированного n-мерного многообразия изоморфна $\mathbb{Z}$, а образующей в этой группе служит фундаментальный класс $[X]$ многообразия, задаваемый суммой всех n-мерных клеток, взятых с коэффициентами ± 1 в зависимости от того, согласована или нет ориентация клетки с ориентацией многообразия.*

При двойственности Пуанкаре фундаментальный класс многообразия соответствует классу $1 \in H^0(X)$, задаваемому коцепью, тождественно равной 1 на всякой 0-мерной клетке.

Для произвольного компактного многообразия, не обязательно ориентированного, фундаментальный класс определен в старшей группе $\mathbb{Z}_2$-гомологий.

Следствие 10.4. *Пусть $X \subset Y$ – компактное ориентированное n-мерное подмногообразие многообразия Y. Тогда оно за-*

дает фундаментальный класс

$$[X] \in H_n(Y).$$

Этот класс является прямым образом фундаментального класса $[X] \in H_n(X)$ при вложении $X \hookrightarrow Y$. Если разница двух подмногообразий является (с учетом ориентаций) границей некоторого многообразия на единицу большей размерности, то фундаментальные классы этих подмногообразий равны

$$X_2 - X_1 = \partial W \Longrightarrow [X_1] = [X_2] \in H_*(Y).$$

Формалицация этого свойства приводит к *теории кобордизмов*. Класс n-мерного *бордизма* на топологическом пространстве Y задается непрерывным отображением $f\colon X \to Y$, где X – гладкое многообразие. Два таких отображения $f_1\colon X_1 \to Y$ и $f_2\colon X_2 \to Y$ считаются *бордантными*, если несвязное объединение этих многообразий является границей некоторого многообразия W на единицу большей размерности, $X_1 \cup X_2 = \partial W$, такого, что отображения f_1 и f_2 продолжаются с края на все многообразие W. Классы эквивалентности образуют *группу бордизмов* $\Omega_n(Y)$, в которой групповая операция – несвязное объединение.

Аналогичным образом определяется *группа ориентированных бордизмов*. Нужно только в приведенном выше определении потребовать ориентированность многообразий X, W и выполнение равенства $\partial W = X_2 - X_1$ с учетом ориентаций.

Неверно, что всякий класс гомологий представляется гладким многообразием. Кроме того, даже в простейшем случае $Y = \mathrm{pt}$ вычисление групп бордизмов является непростой задачей с нетривиальным ответом. Например, $\mathbb{R}P^2$ не является границей никакого трехмерного многообразия, $\mathbb{C}P^2$ не является границей никакого ориентированного пятимерного многообразия. Теория гомологий является упрощением теории бордизмов, в которой у многообразий допускаются особенности. При допускании особенностей всякое многообразие положительной размерности уже является границей (например, своего конуса). Понятия симплициальных, клеточных и сингулярных цепей являются различными формализациями понятия «многообразия с особенностями». Однако с неформальной точки зрения вполне достаточно представлять себе цепи как подмногообразия с особенностями, и тот способ, которым оно разрезано на симплексы, значения не имеет.

С этой точки зрения гомотопическая инвариантность гомологий очевидна: разница двух гомотопных циклов является границей соединяющего их цилиндра. Обратно же, из гомологичности, гомотопность не следует. Например, кривая на кренделе, разрезающая его на два тора с отверстиями, нестягиваема, но гомологична нулю.

Приведем еще одно следствие приведенной точки зрения.

Теорема 10.5. *Пусть Y – компактное неособое* комплексное *алгебраическое многообразие. Тогда всякое его алгебраическое подмногообразие* (*возможно*, *особое*) *обладает фундаментальным целочисленным гомологическим классом.*

Если Y – компактное неособое вещественное *алгебраическое многообразие*, *то всякое его алгебраическое подмногообразие* (*возможно*, *особое*) *обладает фундаментальным $\mathbb{Z}_2$-гомологическим классом.*

Ориентируемость гладких комплексных многообразий – фундаментальный факт комплексной геометрии. Если $(z_1, \ldots, z_n)$ – локальная система комплексных координат, то $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ – локальная система вещественных координат, задающая положительную ориентацию, где $z_k = x_k + i\,y_k$. При наличии особенностей первое утверждение следует из того, что особенности сами образуют алгебраическое подмногообразие. Следовательно, они образуют подмножество комплексной коразмерности как минимум один, а значит, вещественной коразмерности как минимум два. Таким образом, особенности вещественной коразмерности один, дающие вклад в границу, отсутствуют.

В вещественной ситуации аналогичное рассуждение не проходит: компоненты коразмерности один у множества особенностей вполне могут присутствовать. Однако теорема утверждает, что ко всякой такой компоненте сходится *четное* число ветвей неособой части подмногообразия. Это утверждение является обобщением того хорошо известного факта, что при зависимости от параметров вещественного многочлена от одной переменной его корни рождаются и умирают парами.

У двойственности Пуанкаре имеются варианты формулировки, относящиеся к случаю, когда гладкое ориентированное многообразие M размерности n не является компактным. Обозначим через $M^* = M \cup \{\mathrm{pt}\}$ пространство одноточечной компактификации многообразия M. Тогда имеют место изоморфизмы

$$H_k(M) \simeq \overline{H}^{n-k}(M^*), \qquad H^k(M) \simeq \overline{H}_{n-k}(M^*),$$

где в правой части равенств стоят приведенные гомологии по модулю добавленной точки. Замечу, что пространство M^* не является многообразием, так что приведенные два равенства не вытекают одно из другого.

В случае, когда M является компактным многообразием с краем, оно является гомотопически эквивалентным своей открытой части $M \setminus \partial M$. Приведенные выше изоморфизмы в этом случае принимают форму

$$H_k(M) \simeq H^{n-k}(M, \partial M), \qquad H^k(M) \simeq H_{n-k}(M, \partial M).$$

Еще один из вариантов двойственности, называемый **двойственностью Александера**, связывает (ко)гомологии замкнутого клеточного подпространства X сферы S^n и его дополнения $S^n \setminus X$:

$$\overline{H}^k(S^n \setminus X) \simeq \overline{H}_{n-k-1}(X), \qquad \overline{H}_k(S^n \setminus X) \simeq \overline{H}^{n-k-1}(X).$$

Эти изоморфизмы задаются композицией изоморфизма двойственности Пуанкаре $H^k(S^n \setminus X) \simeq H_{n-k}(S^n, X)$ и изоморфизма $\partial_*\colon H_{n-k}(S^n, X) \to H_{n-k-1}(X)$ из длинной точной последовательности пары (S^n, X) (имеющего место вследствие тривиальности гомологий сферы $H_k(S^n)$ при $0 < k < n$).

Рассмотрим, например, дополнение $S^3 \setminus K$ к узлу $K \sim S^1$ на трехмерной сфере. Для неэквивалентных узлов пространства $S^3 \setminus K$ могут оказаться негомеоморфными и даже гомотопически неэквивалентными (в частности, они могут иметь неизоморфные фундаментальные группы). Однако гомологии у всех таких пространств изоморфны между собой и изоморфны гомологиям окружности:

$$H^0(S^3 \setminus K) = H^1(S^3 \setminus K) = \mathbb{Z}$$

и $H^k(S^3 \setminus K) = 0$ при $k > 1$.

Задача 10.6. Вычислите гомологии и опишите геометрически их образующие для следующих пространств: а) двумерный тор $\mathbb{T}^2$; б) факторпространство $\mathbb{T}^2/S^1$, получающееся из тора стягиванием оного из его меридианов; в) факторпространство $M/\partial M$, где M – полноторий, заданный как произведение окружности и двумерного диска.

Задача 10.7. Вычислите гомологии трехмерного многообразия M, образованного единичными касательными векторами к ориентируемой компактной поверхности S рода g.

Решение. Обозначим через $p\colon M \to S$ проекцию, сопоставляющую касательному вектору его точку прикрепления. Это отображение является локально тривиальным расслоением со слоем S^1.

Разобьем поверхность S на маленький диск D и замыкание его дополнения C, так что $D \cap C = \partial D = \partial C = S^1$. Заметим, что диск D стягиваем и имеет тривиальные гомологии. Гомологии его дополнения C по двойственности Пуанкаре изоморфны когомологиям пары $(C, \partial C)$, т.е. приведенным гомологиям самой поверхности $S \sim C/\partial C$:

$$H_0(C) = H_0(S) = \mathbb{Z}, \qquad H_1(C) = H_1(S) = \mathbb{Z}^{2g}, \qquad H_2(C) = 0.$$

В качестве образующих группы $H_1(C)$ можно взять $2g$ кривых на поверхности, задающих базис в группе $H_1(S)$ (сдвинув при необходимости эти кривые, можно добиться того, чтобы они не проходили через диск D).

Разбиение $S = D \cup C$ задает аналогичное разбиение $M = X \cup Y$, где $X = p^{-1}(D)$, $Y = p^{-1}(C)$. Пространства X и Y являются трехмерными многообразиями, имеющими общий край $\partial X = \partial Y$, диффеоморфный двумерному тору.

Для вычисления гомологий M я воспользуюсь длинной точной последовательностью пары (M, Y). Помимо искомых гомологий многообразия M она содержит гомологии пространства Y, и гомологии фактора $M/Y = X/\partial X$.

Пространство X является полноторием, $X = D \times S^1$. По двойственности Пуанкаре гомологии фактора $X/\partial X$ изоморфны когомологиям самого пространства $X \sim S^1$ (с обращением градуировок). В качестве образующих групп $H_2(X, \partial X) = H^1(S^1) = \mathbb{Z}$ и $H_3(X, \partial X) = H^0(S^1) = \mathbb{Z}$ можно взять диск $D \times \{\mathrm{pt}\}$, и сам полноторий $D \times S^1$, соответственно, рассматриваемые как относительные циклы.

Для вычисления гомологий пространства Y я замечу, что расслоение $p\colon Y \to C$ является, в действительности, тривиальным,

$Y = C \times S^1$. Для задания тривиализации этого расслоения достаточно построить векторное поле v на S, не имеющее особых точек вне диска D. Тогда направление этого поля задаст «начало отсчета» на каждом слое расслоения p над C. Для построения такого поля достаточно взять произвольное поле общего положения, покрыть все его особые точки областью, гомеоморфной диску, и обозначить этот диск через D.

Поскольку гомологии сомножителей C и S^1 произведения $Y \simeq C \times S^1$ не имеют кручения, мы получаем изоморфизм

$$H_*(Y) = H_*(C) \otimes H_*(S^1).$$

Вычисленные гомологии пространств $X/\partial X$ и Y собраны в следующей таблице:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
k & 0 & 1 & 2 & 3 \\
H_k(X,\partial X) & 0 & 0 & \mathbb{Z} \arrow[dl, "\partial_*"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, "\partial_*"'] \\
H_k(Y) & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}^{2g+1} & \mathbb{Z}^{2g} & 0
\end{tikzcd}$$

Образующими группы $H_1(Y)$ служит произвольный слой $p^{-1}(\mathrm{pt}) \simeq S^1$ и $2g$ кривых, задающих базис группы $H_1(C) = \mathbb{Z}^{2g}$ и поднятых в Y при помощи поля v.

Чтобы воспользоваться длинной точной последовательностью, нужно еще знать действие связывающего гомоморфизма ∂_*. Гомоморфизм $\partial_* \colon H_3(X, \partial X) \to H_2(Y)$ тривиален (в этом можно убедиться без вычислений, поскольку образующая группы $H_3(X, \partial X)$ является образом фундаментального класса $[M] \in H_3(M)$, о существовании которого мы знаем до всяких вычислений).

Вычислим гомоморфизм $\partial_* \colon H_2(X, \partial X) \to H_1(Y)$. Образующей группы $H_2(X, \partial X)$ служит диск $D \times \{\mathrm{pt}\} \subset X \sim D \times S^1$. Образ класса этого диска при гомоморфизме ∂_* представлен его границей $\Gamma \simeq S^1 \subset \partial X = \partial Y \subset Y$, рассматриваемой как цикл в Y. Нам нужно выразить класс цикла Γ через образующие группы $H_1(Y)$.

При изоморфизме $Y = C \times S^1$ кривая Γ лежит в торе $\partial C \times S^1$, обходит один раз вдоль образующей $C \times \{\mathrm{pt}\}$ тора и некоторое число e раз вдоль образующей $\{\mathrm{pt}\} \times S^1$. Число e вовсе не обязано равняться нулю. Дело в том, что ограничение расслоения p

на окружность $\partial D = \partial C$ тривиально, но тривиализация этого ограничения, полученная из ограничений тривиализаций расслоения p над D и над C, отличаются, и число e как раз измеряет отличие этих тривиализаций. А именно, число e равно числу вращения поля v при обходе вдоль границы диска D, т.е. суммарному индексу вращения всех его особых точек. Для поверхности рода g суммарный индекс вращения равен $e = 2 - 2g$, т.е. эйлеровой характеристике этой поверхности. Отсюда следует, что кривая Γ гомологична $2 - 2g$ раз пройденному слою расслоения p.

Таким образом, гомоморфизм $\partial_*\colon H_2(X, \partial X) \to H_1(Y)$ является вложением в качестве подгруппы индекса $|2 - 2g|$ в один из прямых слагаемых $\mathbb{Z}$ группы $H_1(Y) = \mathbb{Z}^{2g+1}$.

Теперь все необходимые данные для подстановки в длинную точную последовательность пары (M, Y) у нас имеются, и мы получаем из этой последовательности:

$$H_0(M) = \mathbb{Z}, \qquad H_2(M) = \mathbb{Z}^{2g}, \qquad H_3(M) = \mathbb{Z},$$

а группа $H_1(M)$ определяется из короткой точной последовательности

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z}^{2g} \longleftarrow H_1(M) \longleftarrow \mathbb{Z}_{|2-2g|} \longleftarrow 0.$$

Такая последовательность всегда расщепляется и мы получаем, окончательно, $H_1(M) = \mathbb{Z}^{2g} \oplus \mathbb{Z}_{|2-2g|}$.

Задача 10.8. Повторите вычисление приведенного решения предыдущей задачи, используя точную последовательность пары (M, X).

11 Двойственность и когомологии

Пусть заданы многообразие и его гладкое подмногообразие $X \subset Y$. Если они оба ориентированы и компактны, то из фундаментального класса многообразия X мы по двойственности получаем класс когомологий на Y дополнительной размерности. Оказывается, для определения *класса когомологий, двойственного подмногообразию*, условие компактности обоих многообразий X и Y можно ослабить до условия *замкнутости* подмногообразия $X \subset Y$, а условие ориентированности многообразий – до условия *коориентированности* подмногообразия $X \subset Y$, т.е. ориентированности нормального расслоения. Двойственный к X класс когомологий можно задать явной симплициальной коцепью.

Рассмотрим на Y произвольную триангуляцию. Пошевелив, при необходимости, многообразие X, мы можем предполагать, что оно трансверсально по отношению к каждой грани триангуляции. В качестве шевеления мы можем рассмотреть подмногообразие вида $g(X)$, где g – близкий к тождественному диффеоморфизм. Обозначим через $m = \dim Y - \dim X$ коразмерность подмногообразия Y. Рассмотрим m-коцепь φ_X, значение которой на m-мерной грани равно *индексу пересечения* этой грани с многообразием X. Индекс пересечения вычисляется как общее количество точек пересечения грани с многообразием X, посчитанных с учетом знаков. Знак равен $\pm$ в зависимости от того, согласована или противоположна собственная ориентация грани с ориентацией, задаваемой на ней как на трансверсали к коориентированному многообразию X.

Предложение 11.1. *Предположим, что подмногообразие $X \subset Y$ замкнуто и коориентировано. Тогда коцепь φ_X замкнута. Задаваемый ею класс когомологий*

$$[X] \in H^m(Y), \qquad m = \operatorname{codim}_Y X,$$

не зависит ни от выбора шевеления $g(X)$ подмногообразия X, ни от выбора триангуляции на Y.

Доказательство предложения прямое, но требует некоторой работы. Для двух триангуляций на многообразии найдется третья, которая является подразбиением как первой, так и второй. Цепной комплекс, получаемый при подразбиении триангуляции, цепно гомотопен исходному. Нужно проверить, что цепная гомотопия согласована с конструкцией коцепи φ_X. Я опускаю детали этих рассуждений.

Задача 11.2. Пусть $X \subset Y$ – замкнутое коориентированное многообразие с краем, трансверсальное заданной триангуляции на Y. Докажите, что край ∂X наследует естественную коориентацию, при этом

$$\delta\varphi_X = \varphi_{\partial X}.$$

Одно из преимуществ когомологической версии фундаментального класса состоит в ее функториальности по отношению к операции взятия обратного образа. Пусть $f\colon Z \to Y$ – произвольное гладкое отображение. Пошевелив, при необходимости это отображение, его можно сделать транствером по отношению к заданному замкнутому коориентированному подмногообразию $X \subset Y$.

Следствие 11.3. *При выполнении условия трансверсальности подпространство $f^{-1}(X)$ является гладким, замкнутым, коориентированным подмногообразием той же коразмерности*

$$\operatorname{codim}_Z f^{-1}(X) = \operatorname{codim}_Y X = m,$$

и двойственный ему класс когомологий равен

$$[f^{-1}(X)] = f^*[X] \in H^m(Z).$$

Формула следствия выполняется на уровне коцепей и вытекает из определения гомоморфизма f^* для симплициальных когомологий.

При помощи двойственности Пуанкаре легко описывается умножение: произведению классов когомологий отвечает пересечение двойственных им циклов.

Теорема 11.4. *Пусть A и B – два трансверсально пересекающихся замкнутых коориентированных подмногообразия многообразия X. Тогда их пересечение наделено естественной коориентацией и его фундаментальный когомологический класс равен произведению фундаментальных когомологических классов многообразий A и B,*

$$[A] \smile [B] = [A \cap B] \in H^{\operatorname{codim} A + \operatorname{codim} B}(X).$$

Если многообразия пересекаются нетрансверсально, то их можно привести в общее положение малым шевелением одного из них. Класс пересечения не зависит от выбора шевеления.

Гомологии многообразий и операцию пересечения циклов ввел Пуанкаре. Лишь позже Колмогоров и Александер осознали, что двойственная операция умножения в когомологиях имеет более инвариантный смысл и может быть определена для произвольного топологического пространства.

Доказательство. Выберем на X триангуляцию, трансверсальную обоим подмногообразиям. Непосредственно из определения $\times$-умножения вытекает, что $\times$-произведение коцепей, двойственных многообразиям A и B, является коцепью, двойственной подмногообразию $A \times B \subset X \times X$. Прообразом этого подмногообразия при диагональном вложении $X \to X \times X$ служит в точности пересечение $A \cap B$, что и доказывает теорему.

Пример 11.5. Мы знаем аддитивную структуру гомологий проективного пространства $\mathbb{C}P^n$: единственными нетривиальными группами когомологий являются группы $H^{2k}(\mathbb{C}P^n) \simeq \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Образующей группы $H^{2k}(\mathbb{C}P^n)$ служит класс, двойственный $(n-k)$-мерному проективному подпространству. Пересечением проективных подпространств коразмерностей k и ℓ является проективное подпространство коразмерности $k+\ell$. Следовательно, кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}P^n)$ изоморфно *кольцу срезанных многочленов*. Оно порождено классом гиперплоскости $u \in H^2(\mathbb{C}P^n)$, а единственным соотношением является $u^{n+1} = 0$:

$$H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[u]/u^{n+1}.$$

Аналогичное описание имеет кольцо когомологий вещественного проективного пространства, если в качестве коэффициентов выступает группа $\mathbb{Z}_2$:

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\omega]/\omega^{n+1},$$

где $\omega \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$ – класс гиперплоскости.

Задача 11.6. Вычислите класс $[H] \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ когомологий неособой комплексной проективной гиперповерхности $H \subset \mathbb{C}P^n$, заданной в однородных координатах однородным многочленом степени d.

12 Теория Морса

Пусть задано многообразие и гладкая вещественнозначная функция на нем. *Критической точкой* функции называется точка, в которой дифференциал функции обращается в ноль. Значение функции в критической точке называется *критическим значением*. В критической точке корректно определен *второй дифференциал* функции – квадратичная форма на касательном пространстве, заданная членами второго порядка тейлоровского разложения функции в этой точке.

Критическая точка называется *невырожденной*, если второй дифференциал является невырожденной квадратичной формой.

Линейной заменой координат всякая квадратичная форма приводится к сумме квадратов с определенными знаками. Следовательно, в окрестности невырожденной критической точки можно подобрать такую систему координат $x_1, \dots, x_n$, в которой функция представляется в виде

$$f(x) = -x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 + \cdots ,$$

где последнее многоточие обозначает члены более высокого порядка (в действительности, в окрестности невырожденной критической точки заменой координат функцию можно привести к своей квадратичной части, но я этого не использую). Число k отрицательных квадратов в нормальной форме, т.е. отрицательный индекс инерции второго дифференциала, называется *индексом Морса* критической точки.

Определение 12.1. Бесконечно гладкая вещественнозначная функция на компактном многообразии называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырожденны.

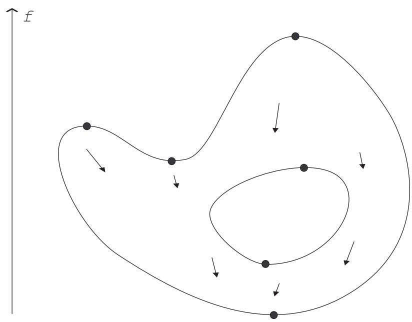
Иногда в определении функции Морса дополнительно требуют, чтобы все критические значения были различными, однако мне это не потребуется.

Функции Морса образуют открытое всюду плотное подпространство в пространстве всех функций, т.е. являются функциями общего положения. Из компактности многообразия вытекает, что количество критических точек функции Морса конечно. Теория Морса состоит в использовании функции Морса для изучения топологии многообразия. Она описывает изменение топологии множества меньших значений $f \leqslant c$ при изменении константы c от большого по абсолютной величине отрицательного значения (когда множество меньших значений пусто) до больших положительных значений (когда это множество совпадает со всем многообразием). Я приведу только «гомологическую» часть теории Морса, относящуюся к вычислению гомологий многообразия, и настоятельно рекомендую изучить самостоятельно по учебникам полную, гомотопическую версию этой теории.

Гомологическая часть теории Морса состоит в изучении градиентного потока функции f. Чтобы определить градиентное поле, нужно зафиксировать еще метрику на многообразии. Традиционно градиент рассматривается с отрицательным знаком: с функцией f связывается векторное поле $v = -\operatorname{grad} f$. Из определения поля v мгновенно вытекает, что значение функции f убывает вдоль всякой траектории поля v:

$$\partial_v f = -(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \leqslant 0.$$

Полезно представлять многообразие вложенным в евклидово пространство, а в качестве функции рассматривать одну из координат (функцию высоты). Тогда векторное поле v всюду направлено «вниз».



Вместо собственно градиента можно рассматривать произвольное *градиентноподобное* поле v. По определению, поле называется гдрадиентноподобным по отношению к функции f, если во всякой точке выполняется неравенство

$$\partial_v f \leqslant 0,$$

причем равенство имеет место только в критических точках и линейная часть поля в критических точках невырожденна. Использование градиентноподобного поля удобно тем, что для его определения не требуется вводить метрику.

Особенности поля v в точности соответствуют критическим точкам функции f. Если метрика евклидова и функция задается в подходящих евклидовых координатах в виде $f = -\frac{x_1^2}{2} - \cdots - \frac{x_k^2}{2} + \frac{x_{k+1}^2}{2} + \cdots + \frac{x_n^2}{2}$, то поток поля $v = -\operatorname{grad} f$ задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \ldots\ldots \\ \dot{x}_k = x_k, \\ \dot{x}_{k+1} = -x_{k+1}, \\ \ldots\ldots \\ \dot{x}_n = -x_n. \end{cases}$$

Траектории этого поля устроены следующим образом. Те из них, которые содержатся в плоскости координат $x_1, \ldots, x_k$, имеют своим пределом начало координат при $t \to -\infty$, где t – временной параметр траектории. Аналогично, траектории, содержащиеся в плоскости координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$, стремятся к началу координат при $t \to +\infty$. Вдоль всех остальных траекторий функция f изменяется монотонно и неограниченно. Приведенное качественное описание поведения градиентного потока в окрестности невырожденной критической точки справедливо и в общем случае.

Предложение 12.2. *Поток градиентноподобного поля v в окрестности всякой невырожденной критической точки x индекса k имеет инвариантное притягивающее многообразие $U^+(x)$ размерности $n - k$, образованное траекториями, входящими в точку x, и отталкивающее многообразие $U^-(x)$ размерности k, состоящее из траекторий, выходящих из этой точки. Многообразия $U^+(x)$ и $U^-(x)$ гладкие и пересекаются в точке x трансверсально.*

Посмотрим на глобальное поведение многообразия $U^-(x)$ вне выбранной координатной окрестности. Ясно, что отталкивающие траектории параметризуются точками $(k-1)$-мерной сферы. Следовательно, глобально многообразие $U^-(x)$ является k-мерной клеткой. В результате все многообразие M разбивается на клетки вида $U^-(x)$ для различных критических точек. А именно, чтобы понять, какой клетке принадлежит некоторая точка многообразия, нужно из этой точки выпустить траекторию поля v и посмотреть ее предел при $t \to -\infty$. В силу компактности, этот предел существует (поскольку функция возрастает вдоль этой траектории) и равен одной из критических точек.

Чтобы полученное разбиение было клеточным, необходимо еще выполнение условия на размерность примыкающих клеток. Это условие выполнено, если метрика является метрикой общего положения.

Следствие 12.3. *Каждая функция Морса на компактном многообразии задает его клеточное разбиение, клетки которого размерности k взаимно однозначно соответствуют критическим точкам индекса k.*

Следствие 12.4. *Каждая функция Морса задает цепной комплекс, образующие которого размерности k взаимно однозначно соответствуют критическим точкам индекса k.*

Построенный комплекс называется *комплексом Морса.* Для того, чтобы получить b_k-мерную группу гомологий, необходимо иметь по меньшей мере b_k-мерное пространство k-цепей. В результате мы получаем следующее *неравенство Морса.*

Следствие 12.5. *Количество m_k критических точек индекса k функции Морса не меньше k-го числа Бетти b_k этого многообразия (вычисленного для произвольного поля коэффициентов).*

Например, всякая гладкая функция общего положения на ориентированной поверхности рода g имеет не менее $2g$ седловых критических точек.

Другим очевидным применением теории Морса является двойственность Пуанкаре: гомологический комплекс Морса, построенный по функции f, совпадает с когомологическим комплексом Морса, построенным по функции $-f$. Клеточным разбиением, двойственным разбиению на клетки $U^-(x)$, является разбиение на клетки $U^+(x)$.

Еще одним следствием комплекса Морса является вычисление эйлеровой характеристики многообразия. Эйлеровой характеристикой конечного клеточного пространства называется альтернированная сумма чисел Бетти

$$\chi(M) = \sum (-1)^i \, b_i.$$

Это определение не зависит от выбора поля коэффициентов.

Следствие 12.6. *Эйлерова характеристика компактного многообразия равна альтернированной сумме количеств критических точек различных индексов произвольной функции Морса,*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i m_i,$$

где m_i *– количество критических точек индекса* i.

Вклад критической точки в эйлерову характеристику равен индексу градиентного поля в этой точке. Напомним определение индекса изолированной особой точки векторного поля. Рассмотрим произвольную карту на многообразии с центром в данной точке. Окружим точку сферой S^{n-1}_ε маленького радиуса и рассмотрим отображение этой сферы в единичную, задаваемое формулой $\varphi(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|}$. Индексом особой точки называется степень отображения φ.

$$\operatorname{ind}_v(0) = \deg(\varphi\colon S^{n-1}_\varepsilon \to S^{n-1}).$$

Для определения индекса нужно зафиксировать ориентацию карты, однако сам индекс от выбора ориентации не зависит: изменение ориентации карты влечет изменение ориентаций обеих сфер как прообраза так и образа отображения φ, поэтому степень этого отображения не меняется. Например, для векторного поля на плоскости индекс особой точки типа фокус (притягивающий или отталкивающий) равен $+1$, а индекс седловой особой точки равен -1.

ind=+1 ind=-1

Следствие 12.7. *Эйлерова характеристика компактного многообразия равна сумме индексов особых точек произвольного* *векторного поля общего положения на нем*

$$\chi(M) = \sum_{x \in M} \operatorname{ind}_v(x).$$

Равносильно, эйлерова характеристика равна индексу самопересечения нулевого сечения касательного расслоения TM, или индексу самопересечения диагонали в декартовом квадрате $X \times X$.

Действительно, окрестность диагонали в декартовом квадрате диффеоморфна пространству касательного расслоения, а шевеление нулевого сечения касательного расслоения задается векторным полем. Поэтому все три способа определения эйлеровой характеристики последнего следствия эквивалентны между собой. Если в качестве поля взять градиентное поле некоторой морсовской функции, то мы получим эйлерову характеристику, вычисленную при помощи комплекса Морса, что доказывает эквивалентность утверждений последних двух следствий.

Задача 12.8. 1. Докажите, что эйлерова характеристика всякого нечетномерного компактного многообразия равна нулю.

2. Докажите, что эйлерова характеристика всякого нечетномерного компактного многообразия с краем определяется эйлеровой характеристикой края:

$$2\,\chi(M) = \chi(\partial M), \qquad \dim M = 2k+1.$$

Для практических вычислений в комплексе Морса необходимо также знать геометрическое описание коэффициентов инцидентности клеток соседней размерности. Это описание также использует градиентный поток. Рассмотрим две критические точки x индекса k и y индекса $k-1$. Рассмотрим траектории поля v, выходящие из точки x и входящие в точку y. Ясно, что такие траектории существуют, только если соответствующие критические значения удовлетворяют неравенству $f(y) < f(x)$.

Предложение 12.9. *В случае метрики общего положения число градиентных траекторий, соединяющих точки x и y соседних индексов, конечно, и соответствующий коэффициент инцидентности равен количеству таких тракеторий, посчитанных с учетом знаков.*

Действительно, эти градиентные траектории являются пересечением многообразий $U^-(x)$ и $U^+(y)$ размерностей k и $n-k+1$, соответственно, а следовательно, в случае общего положения это пересечение одномерно. Для определения знаков нужно зафиксировать ориентацию многообразия $U^-(x)$ для каждой критической точки, или, что равносильно, коориентацию многообразия $U^+(x)$. Тогда каждая компонента пересечения $U^-(x) \cap U^+(y)$ получает естественную ориентацию и знак положителен или отрицателен в зависимости от того, совпадает или нет полученная ориентация траекторий с ориентацией, задаваемой направлением движения.

Метод теории Морса применим и к исследованию некомпактных многообразий. Необходимо только контролировать асимптотическое поведение функции при уходе на бесконечность. Например, можно рассматривать функции, для которых множество меньших значений $f \leqslant c$ компактно для любого c, или, для многообразия с краем, можно рассмотреть функцию, тождественно равную нулю на краю и строго положительную внутри и т.д.

13 Гомологии комплексных многообразий

Помимо вычисления гомологий конкретных пространств, теория Морса помогает получать и общие утверждения. Рассмотрим, например, гладкое комплексное многообразие $M \subset \mathbb{C}^N$, задаваемое набором комплексных многочленов. Если его комплексная размерность равна n, то его можно рассматривать как гладкое некомпактное многообразие вещественной размерности $2n$. Для изучения его топологии можно рассмотреть функцию r^2 квадрата (евклидова) расстояния до начала координат. При общем выборе начала координат эта функция является морсовской.

Теорема 13.1. *Индекс Морса всякой критической точки функции r^2 не превышает комплексной размерности n аффинного многообразия. Следовательно, гомологии такого многообразия тривиальны в размерностях, больших чем n,*

$$H_k(M) = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad k > n.$$

Приведенное утверждение называется *свойством Штейна* аффинных комплексных многообразий. Оно выполняется и в гомотопическом смысле: всякое неособое аффинное комплексное многообразие комплексной размерности n гомотопически эквивалентно клеточному пространству, в котором присутствуют только клетки размерности не выше n. (Теорема не противоречит двойственности Пуанкаре, поскольку рассматриваемое в ней многообразие некомпактно).

Задача 13.2. Определите гомотопический (а лучше, дифференцируемый) тип комплексной гиперповерхности в $\mathbb{C}^m$, заданной комплексным уравнением $z_1^2 + \cdots + z_m^2 = 1$. (Ответ: это многообразие гомотопически эквивалентно сфере S^{m-1} и диффеоморфно пространству TS^{m-1} ее касательного расслоения.)

Доказательство теоремы. Для простоты я ограничусь случаем, когда подмногообразие $M \subset \mathbb{C}^N$ является гиперповерхностью, $n = \dim M = N - 1$. Рассмотрим критическую точку z_0 на поверхности, находящуюся на расстоянии $r_0 = |z_0|$ от начала координат. Выберем систему *эрмитовых* координат $(t, w_1, \ldots, w_n)$ в $\mathbb{C}^N$ таким образом, чтобы ось координаты t проходила через точку z_0. Домножив координату t на подходящий множитель, можно добиться того, чтобы точка z_0 имела координаты $(r_0, 0, \ldots, 0)$. Тогда w служит локальной координатой на гиперповерхности, а сама гиперповерхность представляется как график некоторой голоморфной функции $t = r_0 + F(w)$. Следовательно, рассматриваемая функция Морса имеет вид

$$r^2 = |r_0 + F(w)|^2 + |w|^2 = |r_0|^2 + 2\,r_0 \operatorname{Re} F(w) + |F(w)|^2 + |w|^2.$$

Условие того, что точка z_0 критическая, равносильно равенству нулю линейной части функции $2\,r_0 \operatorname{Re} F(w)$, т.е. равенству нулю линейной части самой функции $F(w)$. Иными словами, *точка $z_0 \in M$ является критической для ограничения функции r^2 на M тогда и только тогда, когда вектор z_0 эрмитово ортогонален поверхности M.*

При выполнении условия ортогональности тейлоровское разложение функции F начинается с членов второго порядка, $F = Q(w) + o(|w|^2)$, где Q – комплексная квадратичная форма. Следовательно, функция r^2 принимает вид

$$r^2 = r_0^2 + 2\,r_0 \operatorname{Re} Q(w) + |w|^2 + o(|w|^2).$$

Итак, *второй дифференциал функции r^2 представляется в виде суммы двух квадратичных форм, одна из которых $2\,r_0 \operatorname{Re} Q(w)$ является вещественной частью комплексной квадратичной формы, а вторая $|w|^2$ положительно определена.*

Из линейной алгебры известно, что всякая комплексная квадратичная форма эрмитовым преобразованием приводится к диагональному виду $Q(w) = c_1 \frac{w_1^2}{2} + \cdots + c_n \frac{w_n^2}{2}$, где константы c_i можно сделать вещественными и даже неотрицательными. Эти константы называются *главными кривизнами* поверхности M в точке z_0. Вещественная часть этой формы равна

$$\operatorname{Re} Q(w) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} c_j \, (x_j^2 - y_j^2),$$

где $z_j = x_j + i\, y_j$. Сигнатура формы $2\, r_0 \operatorname{Re} Q(w)$ (при условии ее невырожденности) равна в точности n, т.е. половине вещественной размерности многообразия M. При прибавлении положительно определенной формы $|w|^2 = \sum (x_j^2 + y_j^2)$ сигнатура может только уменьшиться. Это завершает доказательство теоремы.

Из приведенных вычислений следует, что сигнатура второго дифференциала $2\, r_0 \operatorname{Re} Q(w) + |w|^2$ функции r^2 равна количеству тех главных кривизн c_j, для которых выполняется неравенство $c_j > 1/r_0$. Таким образом, у критических точек, расположенных дальше от начала координат, сигнатура, как правило, больше.

Задача 13.3. Вычислите эйлерову характеристику комплексной гиперповерхности в $\mathbb{C}^m$, задаваемой уравнением $z_1^d + \cdots + z_m^d = 1$.

Решение[3]. В приведенных ниже вычислениях мы предполагаем выполнение неравенства $d > 2$. Ответ, полученный в конце решения, справедлив и при $d = 2$ и при $d = 1$. Случай $d = 1$ очевиден, а случай $d = 2$ покрывается предыдущей задачей.

Прежде всего заметим, что по теореме о неявной функции эта поверхность $f(z) = 1$ неособая: единственная точка, в которой все частные производные функции $f(z) = \sum z_j^d$ обращаются в ноль, является началом координат, которое поверхности не принадлежит.

[3]Эта задача и ее решение позаимствованы из книги: Арнольд В. И., Капитанио Ж.-М. и Урибе Р., *Геометрия*.

Для исследования топологии этой поверхности рассмотрим функцию Морса r^2. Эта функция обладает большой группой симметрии G, состоящей из перестановок координат и умножения координат на произвольные корни d-й степени из 1. Порядок группы G равен $m!\, d^m$. Поэтому для всякой критической точки z_0 вся орбита этой точки состоит из критических точек.

Касательная гиперплоскость к поверхности M задается равенством

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}\, dz_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_m}\, dz_m = 0.$$

Эрмитово ортогональное дополнение к этой гиперплоскости порождается вектором $\vec{n}$ с координатами $(\bar{z}_1^{d-1}, \dots, \bar{z}_m^{d-1})$. Как было показано при доказательстве теоремы 13.1, условие того, что данная точка z_0 является критической для функции r^2, эквивалентно эрмитовой ортогональности вектора z_0 поверхности M, т.е. пропорциональности векторов z_0 и $\vec{n}$:

$$\bar{z}_j^{d-1} = \lambda\, z_j.$$

Из этого равенства следует, что либо $z_j = 0$, либо $|z_j| = |\lambda|^{1/(d-2)}$ и z_j является одним из корней степени d из числа $z_j^d = \bar{\lambda}\, z_j\, \bar{z}_j = \bar{\lambda}\, |\lambda|^{1/(d-2)}$, одинакового для всех j. Из равенства $\sum z_j^d = 1$ вытекает, что $z_j^d = 1/k$, где k – количество отличных от нуля координат z_j. Подытожим наши вычисления.

Критические точки функции r^2 образуют m орбит группы G, занумерованных числами $k = 1, \dots, m$. В орбиту с номером k входят точки, у которых $m - k$ координат равны нулю, а оставшиеся k координат являются корнями степени d из числа $1/k$. Количество точек в этой орбите равно $C_m^k d^k$. Критическое значение в каждой из точек этой орбиты равно $r^2 = k^{1-2/d}$. Других критических точек у функции r^2 нет.

Для вычисления индекса Морса (и проверки невырожденности критических точек) нужно вычислить главные кривизны поверхности M в каждой из этих точек. Нетрудно посчитать, что в точках орбиты с номером k среди $m - 1$ главных кривизн $m - k$ равны нулю, а остальные $k - 1$ равны между собой и удовлетворяют неравенству $c_j > 1/r$. Из замечания в конце доказательства теоремы 13.1 вытекает, что *индекс Морса точек орбиты с номером k равен $k - 1$.*

Из комплекса Морса функции r^2 мы находим значение эйлеровой характеристики

$$\chi(M) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} C_m^k d^k = 1 - (1-d)^m.$$

Решение этой задачи наводит на следующий вопрос: как устроен дифференциал в комплексе Морса и какие в результате у многообразия M гомологии? Из штейновости (или из вычислений, проведенных в решении) вытекает, что отличные от нуля числа Бетти имеют номера не выше $m-1 = \dim_{\mathbb{C}} M$. В действительности, числа Бетти с номерами, меньшими $m-1$ также тривиальны. Более того, теорема Милнора утверждает, что многообразие M гомотопически эквивалентно букету из b_{m-1} сфер размерности $m-1$. Таким образом, отличные от нуля числа Бетти многообразия M равны

$$b_0(M) = 1, \qquad b_{m-1}(M) = (d-1)^m.$$

Задача 13.4. Найдите числа Бетти комплексной гиперповерхности M в $\mathbb{C}P^m$, задаваемой формой степени d с общими коэффициентами.

Решение. Основное нетривиальное соображение состоит в том, что дополнение $\mathbb{C}P^m \setminus M$ обладает свойством Штейна:

$$H^k(\mathbb{C}P^m \setminus M) = 0 \quad \text{при} \quad k > m.$$

Действительно, рассмотрим отображение $\mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^N$, $N = C_{m+d}^m - 1$, задаваемое в однородных координатах всевозможными мономами степени d (их количество равно C_{m+d}^m). Это отображение называется *вложением Веронезе.* Гиперповерхность M переходит при этом вложении в сечение гиперплоскостью. Следовательно, дополнение $\mathbb{C}P^m \setminus M$ допускает вложение в аффинное пространство $\mathbb{C}^N$, откуда и вытекает его штейновость.

Рассмотрим теперь длинную точную последовательность пары $(\mathbb{C}P^m, M)$. Эта последовательность содержит известные группы гомологий $H_k(\mathbb{C}P^m)$, искомые группы гомологий $H_k(M)$ и относительные группы $H_k(\mathbb{C}P^m, M)$, изоморфные по двойственности Пуанкаре группам $H^{2m-k}(\mathbb{C}P^m \setminus M)$. Из штейновости дополнения $\mathbb{C}P^m \setminus M$ и длинной точной последовательности мы находим, что вложение $M \to \mathbb{C}P^m$ индуцирует изоморфизм k-мерных гомологий в размерностях $k < m-1$ (это утверждение является частным случаем так нызываемой *сильной теоремы Лефшеца*).

Таким образом, числа Бетти $b_k(M)$ при $k < m-1$ повторяют соответствующие числа Бетти для $\mathbb{C}P^m$. Вторая половина чисел Бетти находится из двойственности Пуанкаре: $b_k(M) = b_{2(m-1)-k}(M)$ при $k > m-1$. Оставшееся среднее число Бетти $b_{m-1}(M)$ определяется из эйлеровой характеристики:

$$\begin{aligned} b_{2k}(M) &= 1, \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \quad 2k \neq m-1, \\ b_{2k-1}(M) &= 0, \qquad 2k-1 \neq m-1, \\ b_{m-1} &= \begin{cases} m - \chi(M), & m \text{ четно}, \\ \chi(M) - (m-1), & m \text{ нечетно}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, для решения задачи нам осталось посчитать $\chi(M)$.

Эйлерову характеристику многообразия M можно вычислить индукцией по m с использованием решения предыдущей задачи. Рассмотрим пару M, V, где V – пересечение M с общей гиперплоскостью. Тогда

$$\chi(M) = \chi(V) + \chi(M, V).$$

Относительная эйлерова характеристика $\chi(M,V) = \chi(M \setminus V)$ вычислена в предыдущей задаче и равна $1-(1-d)^m$. Действительно, дополнение $M \setminus V$ является аффинной гиперповерхностью в $\mathbb{C}^m$ степени d. Ее топология не зависит от (общего) выбора коэффициентов многочлена, задающего эту гиперповерхность. Следовательно, для определения ее топологии достаточно рассмотреть любой конкретный пример такой гиперповерхности, что и было сделано в предыдущем примере.

Многообразие V также является гиперповерхностью степени d, но в проективном пространстве $\mathbb{C}P^{m-1}$ на единицу меньшего числа измерений. Поэтому мы находим по индукции

$$\chi(M) = \sum_{j=1}^{m} (1 - (1-d)^j) = m - \frac{(1-d) - (1-d)^{m+1}}{d}.$$

Например, для случая $m = 2$ многообразие M – комплексная кривая, т.е. вещественная поверхность, род которой равен

$$g = \frac{b_1}{2} = \frac{(1-d) - (1-d)^3}{2\,d} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Это равенство называется *формулой Римана–Гурвица.*

При $m=3$ M имеет вещественную размерность 4 и его числа Бетти равны

$$b_0=1, \qquad b_1=0, \qquad b_2=d^3-4\,d^2+6\,d-2, \qquad b_3=0, \qquad b_4=1.$$

14 Спектральная последовательность

Под гомологиями в этом пункте мы подразумеваем гомологии с коэффициентами в произвольной абелевой группе, опуская, для краткости, указание на эту группу.

Спектральная последовательность является далеким обобщением точной последовательности пары, относящимся к случаю, когда на топологическом пространстве X задано не одно подпространство, а целая фильтрация замкнутыми подпространствами

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \cdots \subset X.$$

Эта фильтрация задает соответствующую фильтрацию в гомологиях

$$F_0H_*(X) \subset F_1H_*(X) \subset F_2H_*(X) \subset \cdots \subset H_*(X),$$

где подгруппа $F_pH_*(X)$ является образом группы $H_*(X^p)$ при вложении $X^p \to X$. Эта подгруппа порождена классами циклов, носитель которых содержится в X^p. Каждый из циклов c, порождающих эту подгруппу, строится за несколько шагов. На первом шаге строится «шапочка» c_1 от этого цикла, класс которой лежит в относительных гомологиях пары (X^p, X^{p-1}). На втором шаге эта шапочка «удлиняется» до относительного цикла c_2 пары (X^p, X^{p-2}); на следующем шаге – пары (X^p, X^{p-3}), и т.д. Для простоты мы предположим, что фильтрация конечна. Тогда после некоторого конечного количества шагов мы получаем необходимый абсолютный цикл.

В процессе построения цикла необходимо учитывать два обстоятельства. Во-первых, относительный цикл c_r, построенный на r-м шаге, может иметь нетривиальную границу $\partial c_r \subset X^{p-r}$. Чтобы иметь возможность продолжения цикла c_r до относительного цикла пары (X^p, X^{p-r-1}), граница ∂c_r должна быть гомологична циклу с носителем в X^{p-r-1}, т.е. необходимо равенство нулю ее класса $[\partial c_r] \in H_*(X^{p-r}, X^{p-r-1})$. Во-вторых, чтобы класс построенного цикла не был тривиальным, необходимо следить еще, чтобы c_r сам не был границей. В спектральной последовательности оба обстоятельства учитываются одновременно: на r-м шаге учитываются границы только тех цепей, которые лежат в X^{p+r-1}. Обозначим через

$$E^{\infty}_{p,q} = F_pH_{p+q}(X)/F_{p-1}H_{p+q}$$

p-й последовательный фактор введенной фильтрации в группе $H^{p+q}(X)$.

Определение 14.1. r-м приближением группы $E^{\infty}_{p,q}$ называется группа

$$E^r_{p,q} = \frac{H_{p+q}(X^p, X^{p-r})}{\partial_* H_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) + i_* H_{p+q}(X^{p-1}, X^{p-r})},$$

где гомоморфизмы $\partial_* \colon H_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) \to H_{p+q}(X^p, X^{p-r})$ и $i_* \colon H_{p+q}(X^{p-1}, X^{p-r}) \to H_{p+q}(X^p, X^{p-r})$ взяты из длинных точных последовательностей соответствующих троек.

Ясно, что при достаточно больших r последовательность групп $E^r_{p,q}$, $r = 1, 2, \ldots$, стабилизируется к группе $E^{\infty}_{p,q}$.

Теорема 14.2. *Для всех $r \geqslant 1$ имеются естественные гомоморфизмы*

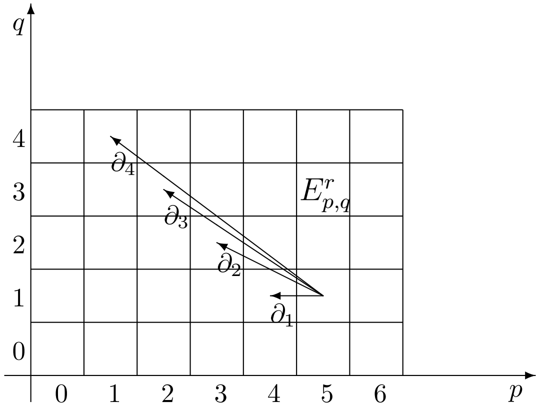
$$\partial_r \colon E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1},$$

такие, что $\partial_r^2 = 0$ и группы $E^{r+1}_{*,*}$ изоморфны гомологиям комплекса $(E^r_{*,*}, \partial_r)$,

$$E^{r+1}_{p,q} = \frac{\mathrm{Ker}(\partial_r \colon E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1})}{\mathrm{Im}(\partial_r \colon E^r_{p+r,q-r+1} \to E^r_{p,q})}.$$

Определение гомоморфизмов ∂_r очевидно: если элемент группы $E^r_{p,q}$ представляется некоторым относительным циклом c, то класс $\partial_r[c]$ представляется границей ∂c этого цикла.

Абстрактной *спектральной последовательностью* называется произвольная последовательность групп $E^r_{p,q}$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, и дифференциалов ∂_r, действующих в $E^r_{*,*}$ с тем же сдвигом индексов, что и выше, и таких, что каждый следующий член последовательности изоморфен гомологиями предыдущего члена. Теорема утверждает, что всякая топологическая фильтрация на



пространстве задает соответствующую абстрактную спектральную последовательность гомологий. Члены спектральной последовательности принято изображать таблицами с группой $E^r_{p,q}$ в клетке с координатами (p, q). Группы полной градуировки n лежат на диагонали $p + q = n$. Направление действия дифференциала ∂_r изображено на рисунке.

Доказательство теоремы, по существу, алгебраическое. В действительности, для построения спектральной последовательности достаточно иметь фильтрацию в цепном комплексе, задающем гомологии. Спектральная последовательность теоремы получается из фильтрации в группе сингулярных цепей на X, p-й член которой состоит из цепей с носителем в X^p. Далее теорема доказывается либо методом диаграммного поиска, либо многократным применением длинных точных последовательностей всевозможных троек. Я опускаю все эти вычисления, который вдумчивый слушатель может провести самостоятельно.

Члены степени n спектральной последовательности задают в пределе группу $\bigoplus_{p+q=n} E^\infty_{p,q}$, которая является присоединенной градуированной группой рассматриваемой фильтрации в группе $H_n(X)$. Этот факт обычно условно изображают записью

$$E^r_{*,*} \Longrightarrow H_*(X).$$

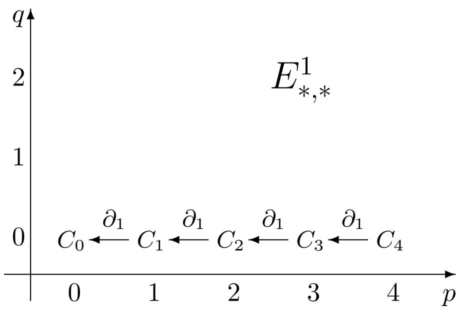
Если в качестве коэффициентов используется поле, то предельный член определяет искомые гомологии однозначно. Однако в общем случае имеется еще некоторая неоднозначность в определении кручения (этот же эффект мы уже наблюдали при изучении длинной точной последовательности). Для устранения неоднозначности при восстановлении гомологий часто используют следующий аналог леммы о пяти гомоморфизмах.

Теорема 14.3. *Пусть заданы два фильтрованных топологических пространства X и Y и непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, сохраняющее фильтрацию. Тогда оно задает гомоморфизм соответствующих спектральных последовательностей*

$$f_*\colon E^r_{p,q}(X) \to E^r_{p,q}(Y).$$

Если этот гомоморфизм является изоморфизмом для некоторого r, то он является изоморфизмом и для всех последующих r, а также изоморфизмом является гомоморфизм $f_*\colon H_*(X) \to H_*(Y)$ предельных гомологий.

Пример 14.4. Пусть задано клеточное пространство X. Рассмотрим его фильтрацию по остовам, $X_k = \mathrm{sk}^k(X)$. Факторпространство X_k/X_{k-1} является букетом k-мерных сфер, нетривиальные гомологии которого сосредоточены в размерности k, и изоморфны группе клеточных k-цепей пространства X. Начальный член соответствующей спектральной последовательности изображен на рисунке.

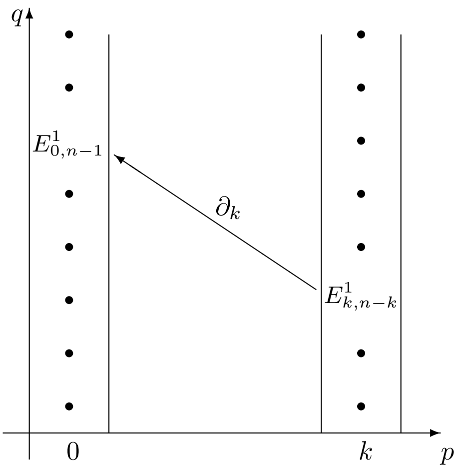


В нем имеется только одна ненулевая строка $q = 0$. Дифференциал ∂_1 в этой строке совпадает с дифференциалом в клеточном цепном комплексе, а все последующие дифференциалы тривиальны по соображению размерностей. Следовательно, группа $E^2 = E^\infty$ изоморфна группе клеточных гомологий и мы еще раз получили изоморфизм клеточных гомологий и сингулярных. В действительности, доказательство этого изоморфизма, приведенное в п. 7 является переводом приведенных выше рассуждений на язык, не использующий понятия спектральной последовательности.

Пример 14.5. Пусть у пространства X имеется подпространство $A \subset X$. Это подпространство задает фильтрацию, состоящую всего из двух членов,

$$\varnothing = \cdots = X_{-1} \subset A = X_0 \subset X_1 = \cdots = X.$$

У соответствующей спектральной последовательности имеется только два ненулевых столбца с номерами 0 и 1: группы $E^1_{0,*}$ изоморфны гомологиям подпространства A, а группы $E^1_{1,*}$ изоморфны относительным гомологиям пары (X, A). При этом первый дифференциал ∂_1 совпадает со связывающим дифференциалом $\partial_* \colon H_{q+1}(X, A) \to H_q(A)$ из длинной точной последовательности пары, а все высшие дифференциалы тривиальны по соображению размерностей. Таким образом, спектральная последовательность сводится в этом случае к длинной точной последовательности пары.



$$\cdots \longleftarrow H_{n-1} \longleftarrow E^1_{0,n-1} \xleftarrow{\partial_k} E^1_{k,n-k} \longleftarrow H_n \longleftarrow E^1_{0,n} \xleftarrow{\partial_k} \cdots .$$

Вообще, *спектральная последовательность, имеющая только две нетривиальных строки или столбца, эквивалентна длинной точной последовательности пары.*

Последовательность, у которой два ненулевых столбца не являются соседними, можно получить из топологической пары (X, A) просто сдвигом нумерации в фильтрации. Например, если положить

$$\varnothing = \cdots = X_{-1} \subset A = X_0 = \cdots = X_{k-1} \subset X_k = \cdots = X,$$

то в получившейся спектральной последовательности нетривиальные столбцы имеют номера 0 и k. Полученная последовательность эквивалентна, по существу, приведенной выше, но ее единственный нетривиальный дифференциал ∂_r имеет номер $r = k$.

Пеример спектральной последовательности, имеющей две ненулевые строки, будет приведен ниже.

15 Спектральная последовательность расслоения

Гомотопические группы пространства, базы и слоя локально тривиального расслоения связаны длинной точной последовательностью. В отличие от гомотопических групп, соотношение между соответствующими гомологическими группами более сложное и описывается спектральной последовательностью.

Определение 15.1. *Спектральной последовательностью расслоения* называется последовательность, построенная по фильтрации тотального пространства, индуцированной из фильтрации базы по ее клеточным остовам.

Пусть задано расслоение $\pi \colon E \to B$ со слоем F. Всякий непрерывный путь γ на базе с началом и концом в точке $x \in B$ задает отображение в себя слоя F_x однозначно, с точностью до гомотопии. Следовательно, соответствующее преобразование группы $H_*(F_x)$ определено уже однозначно, и определяется гомотопическим типом пути γ. Следовательно, фундаментальная группа $\pi_1(B, x)$ базы расслоения действует в группе гомологий его слоя.

Определение 15.2. Расслоение называется *гомологически простым*, если действие фундаментальной группы $\pi_1(B)$ базы расслоения в гомологиях слоя тривиально.

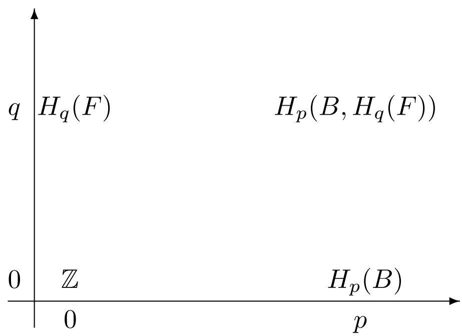
Рассмотрим спектральную последовательность гомологически тривиального расслоения $\pi\colon E \to B$. Начальный член E^1 этой последовательности зависит, очевидно, от выбора клеточного разбиения базы.

Теорема 15.3. *Член E^2 спектральной последовательности расслоения не зависит, с точностью до изоморфизма, от выбора клеточного разбиения базы, и для гомологически простого расслоения имеет вид*

$$E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(F)),$$

где абелева группа $H_q(F)$ рассматривается в качестве группы коэффициентов.

$E^2_{*,*}$



Если в гомологиях базы и слоя кручение отсутствует, или если рассматриваемая группа коэффициентов является полем, то мы имеем также

$$H_p(B, H_q(F)) = H_p(B) \otimes H_q(F).$$

В случае тривиального расслоения высшие дифференциалы отсутствуют, и мы получаем изоморфизм

$$H_n(B \times F) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H_p(B, H_q(F)).$$

Это один из вариантов формулы Кюннета, описывающей гомологии прямого произведения. Свободная часть и кручение гомологий пространства $B \times F$ определяется из этого изоморфизма однозначно при помощи формулы универсальных коэффициентов.

В случае косого произведения в спектральной последовательности могут присутствовать высшие дифференциалы. В результате, у косого произведения гомологий, как правило, меньше, чем у соответствующего прямого произведения.

Набросок доказательства теоремы. Рассмотрим одну из p-мерных клеток σ_p базы. Поскольку клетка стягиваема, над ней расслоение тривиально, и, следовательно, ее полный прообраз $\pi^{-1}(\sigma_p)$ гомеоморфен прямому произведению слоя F на открытый p-мерный шар.

Отсюда следует, что факторпространство p-го члена фильтрации по $(p-1)$-му гомеоморфно букету пространств, каждое из которых является факторпространством вида $F \times B^p / F \times \partial B^p$, где B^p – p-мерный шар. Это пространство получается из p-кратной надстройки $\Sigma^p F$ стягиванием $(p-1)$-мерной сферы. Из изоморфизма надстройки вытекает, что гомологии такого пространства изоморфны гомологиям пространства F со сдвигом градуировки на p. Таким образом, группа $E^1_{p,q}$ изоморфна прямой сумме групп $H_q(F)$, по одной для каждой p-мерной клетке базы. Иными словами, группа

$$E^1_{p,q} \simeq C_p(B) \otimes H_q(F)$$

изоморфна группе p-мерных клеточных цепей базы с коэффициентами в группе $H_q(F)$.

Далее, из естественности изоморфизма надстройки вытекает, что дифференциал ∂_1 из спектральной последовательности совпадает с дифференциалом в цепном комплексе, вычисляющем клеточные гомологии базы. Отсюда вытекает описание второго члена спектральной последовательности, приведенное в теореме.

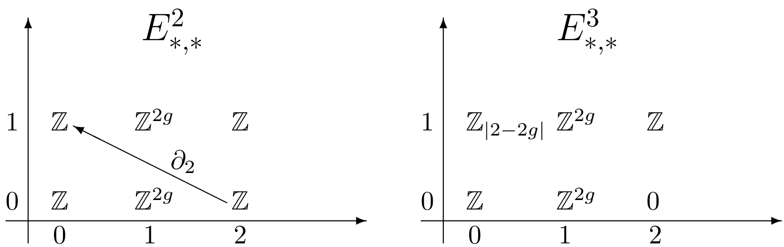
Задача 15.4. В каком месте доказательства используется гомологическая тривиальность расслоения?

Пример 15.5. Предположим, что слоем расслоения $\pi : E \to B$ является n-мерная сфера. Нетривиальные группы гомологий сферы имеют вид $H_0(S^n) \simeq H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. Отображение $S^n \to S^n$ индуцирует тождественный гомоморфизм гомологий, если и только если это отображение имеет степень 1. Отсюда следует, что *гомологическая тривиальность расслоения со слоем* S^n *эквивалентна его ориентируемости*, т.е. согласованной ориентированности его слоев. Если это условие выполняется, то спектральная последовательность имеет две ненулевые строки с номерами $q = 0$ и $q = n$. Как мы уже отмечали, такая спектральная последовательность эквивалентна длинной точной последовательности, которая в данном случае принимает следующий вид (т.н. *точная последовательность Вана*)

$$\cdots \longleftarrow H_{k-1}(E) \longleftarrow H_{k+n-1}(B) \longleftarrow H_k(B) \longleftarrow \\ \longleftarrow H_k(E) \longleftarrow H_{k+n}(B) \longleftarrow \cdots .$$

Пример 15.6. Применим спектральную последовательность расслоения для вычисления гомологий трехмерного многообразия M, образованного касательными векторами единичной длины к ориентированной компактной поверхности S рода g. Проекция $M \to S$, сопоставляющая вектору его точку прикрепления, является локально тривиальным расслоением со слоем S^1. Гомологическая тривиальность этого расслоения вытекает из ориентируемости поверхности S.

Начальный член E^2 спектральной последовательности изображен на рисунке.



Единственным нетривиальным дифференциалом, возможным по соображению размерностей, является дифференциал $\partial_2\colon E^2_{2,0} \to E^2_{0,1}$. По существу, его действие было вычислено в примере 10.7: этот дифференциал изоморфно отображает группу $E^2_{2,0} = H_2(S) = \mathbb{Z}$ на подгруппу индекса $|2 - 2g|$ в группе $E^2_{0,1} = H_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Начиная с третьего члена спектральная последовательность стабилизируется, $E^3 = E^\infty$. Из полученного описания предельного члена мы однозначно восстанавливаем группы $H_0(M) = \mathbb{Z}$,

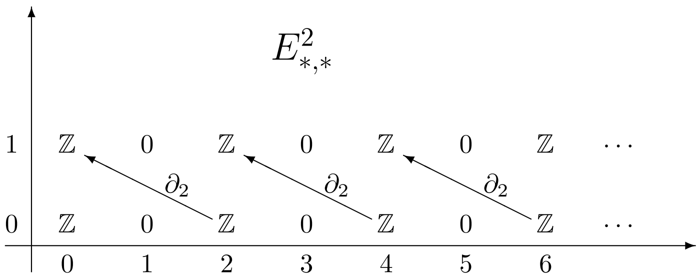
$H_2(M) = \mathbb{Z}^{2g}$, $H_3(M) = \mathbb{Z}$, а для группы $H_1(M)$ мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}_{|2-2g|} \to H_1(M) \to \mathbb{Z}^{2g} \to 0.$$

Такая последовательность всегда расщепляется, и мы получаем $H_1(M) = \mathbb{Z}_{|2-2g|} \oplus \mathbb{Z}^{2g}$. Мы получили то же описание гомологий многообразия M, что и в примере 10.7, только на языке спектральных последовательностей это описание выглядит, на мой взгляд, более прозрачным и естественным.

Пример 15.7. Рассмотрим отображение $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, сопоставляющее точке на единичной сфере $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ комплексную прямую, проходящую через эту точку. Это отображение является расслоением со слоем S^1, называемым *расслоением Хопфа*. Вычислим спектральную последовательность этого расслоения.

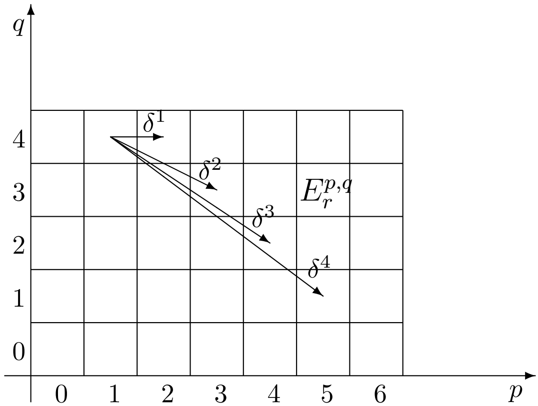
Наличие группы $E^2_{0,0} = H_0(S^1) = \mathbb{Z}$ влечет наличие группы $E^2_{0,1} = H_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Поскольку мы знаем, что предельные одномерные гомологии сферы тривиальны, полученная группа $E^2_{0,1} = \mathbb{Z}$ должна быть «убита» высшими дифференциалами. Единственный возможный кандидат на роль убивающей группы – это группа $E^2_{2,0} \simeq \mathbb{Z}$. Наличие этой группы влечет, в свою очередь, наличие группы $E^2_{2,1} \simeq \mathbb{Z}$ и т.д. Продолжая рассуждать таким же образом, мы получаем однозначное описание члена E^2 спектральной последовательности, изображенного на рисунке.



Отсюда следует вычисление гомологий проективного пространства $\mathbb{C}P^n$: группы $H_k(\mathbb{C}P^n)$ изоморфны $\mathbb{Z}$ при четном $k \leqslant 2n$ и тривиальны при остальных k. Интересно отметить, что этот вывод мы получили только лишь из существования расслоения $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ со слоем S^1, при этом геометрия самого пространства $\mathbb{C}P^n$ никак не использовалась.

Наряду с гомологической спектральной последовательностью имеются также когомологическая спектральная последовательность для вычисления когомологий фильтрованных пространств и расслоений. На первый взгляд, отличие когомологической спектральной последовательности от гомологической только формальное: оно состоит в изменении нижних индексов на верхние, $E_r^{p,q}$, и в обращении направления всех стрелок на противоположные:

$$\delta_r\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}.$$



Имеется, однако, одно отличительное свойство когомологической спектральной последовательности расслоения, демонстрирующее ее предпочтение перед гомологической. Это свойство заключается в ее мультипликативности.

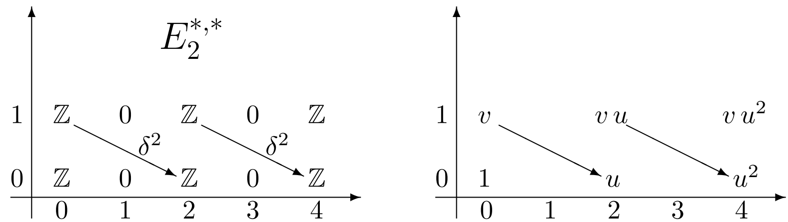
Теорема 15.8. *Все группы $E_r^{*,*}$, $r \geqslant 2$, являются биградуированными кольцами. При этом дифференциал δ_r удовлетворяет равенству*

$$\delta_r(a\,b) = \delta_r(a)\,b + (-1)^{\deg a}\,a\,\delta_r(b)$$

и кольцевая структура на $E_{r+1}^{*,*}$ индуцируется как на когомологиях комплекса $(E_r^{*,*}, \delta_r)$. Кроме того, кольцевая структура на начальном члене $E_2^{*,*} = H^*(B, H^*(F))$ задается умножением в когомологиях базы B и слоя F расслоения, а кольцевая структура в предельном члене $E_\infty^{*,*}$ присоединена к кольцевой структуре *в предельных когомологиях* $H^*(E)$ *тотального пространства* E *расслоения.*

Оставляя в стороне доказательство теоремы (оно несложно, но состоит утомительной проверке большого числа простых утверждений), мы рассмотрим следующий пример.

Пример 15.9. Рассмотрим когомологическую спектральную последовательность расслоения Хопфа $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, изображенную на рисунке.



Обозначим через v образующую группы $E_2^{0,1} = H^1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Положим $u = \delta_2 v \in E_2^{2,0} = H^2(\mathbb{C}P^n)$. Из тех же рассуждений, что и в примере 15.7, мы получаем, что u является образующей группы $H^2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$. Следовательно, образующей группы $E_2^{2,1} = \mathbb{Z}$ служит элемент $u\,v$, для которого мы определяем

$$\delta_2(u\,v) = u\,\delta_2(v) = u^2 \in E_2^{4,0} = H^4(\mathbb{C}P^2),$$

поскольку $\delta_2(u) = 0$ по соображению размерностей. Продолжая таким же образом, мы получаем, что элементы u, u^2, $\ldots$, u^n образуют аддитивный базис в группе $H^*(\mathbb{C}P^n)$. Следовательно, когомологическая спектральная последовательность расслоения Хопфа позволяет получить не только аддитивную, но и мультипликативную структуру когомологий проективного пространства:

$$H^*(\mathbb{C}P^n) \simeq \mathbb{Z}[u]/u^{n+1}.$$

Как и в примере 15.7, этот вывод мы получили только лишь из существования расслоения Хопфа, при этом геометрия проективного пространства никак не использовалась!

16 Пример: теорема Пушкаря о диаметрах подмногообразий евклидова пространства

В этом пункте мы рассматриваем один поучительный пример приложения теории гомологий. Несмотря на относительную простоту, в этом примере удивительным образом сочетается практически все многообразие методов, которые мы изучали до сих пор: теория Морса, двойственность Пуанкаре, умножение в когомологиях и пересечение циклов, длинная точная последовательность пары и спектральная последовательность расслоения. При этом все эти методы приходится применять творчески (многообразие, на котором изучается функция Морса и к которому применяется двойственность Пуанкаре, некомпактно, его замыкание имеет особенности; а расслоение, у которого вычисляется спектральная последовательность, не является гомологически простым).

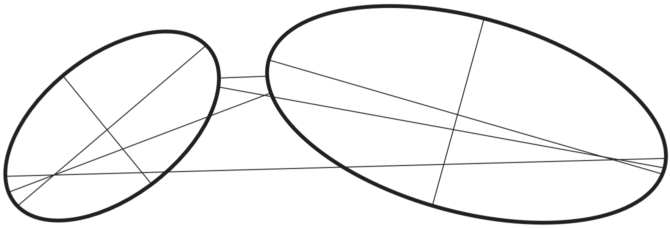
Если кому-нибудь из слушателей случится со временем изучать взаимодействие когомологий с действием групп преобразований, я настоятельно советую вернуться к этому примеру и перевести приводимые ниже рассуждения на язык эквивариантных когомологий.

Пожалуй, единственный фрагмент общей теории, который в приводимом примере не используется, это связь между свободной частью и кручением в гомологиях и формула универсальных коэффициентов: в этом пункте всюду под (ко)гомологиями мы подразумеваем (ко)гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Указание на группу коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ при этом опускается в обозначениях.

Пусть задано гладкое компактное подмногообразие $M^n \subset \mathbb{R}^N$ евклидова пространства. *Диаметром* называется отрезок с концами x и y на многообразии, перпендикулярный многообразию в обоих концах. С метрической точки зрения диаметры – это критические точки (с ненулевым критическим значением) функции квадрата расстояния

$$r^2 \colon M \times M \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|^2.$$

Если многообразие находится в общем положении, то число диаметров конечно, и все они невырождены (соответствующая каждому диаметру критическая точка морсовская).



Теорема 16.1. (П. Пушкарь) *Для всякого компактного подмногообразия общего положения в евклидовом пространстве число его диаметров $\#d(M)$ оценивается снизу константой*

$$\#d(M) \geqslant \frac{B\,(B-1)}{2} + \frac{n\,B}{2},$$

где $n = \dim M$ – размерность многообразия и B – сумма его mod2-*чисел Бетти.*

Например, число диаметров замкнутой кривой S^1 не меньше двух, двухкомпонентной кривой $S^1 \sqcup S^1$ – не меньше восьми, выпуклой поверхности, диффеоморфной сфере S^2 – не меньше трех, а поверхности, диффеоморфной тору $S^1 \times S^1$ – не меньше десяти. П. Пушкарь доказал, что во многих случаях, например, для произведений сфер и их несвязных объединений, оценка теорема точна, построив примеры вложений, реализующих минимально возможное число диаметров. Заметим, что оценка теоремы не зависит от размерности N объемлющего пространства.

Рассмотрим симметрический квадрат $M^{(2)}$, полученный из прямого произведения $M \times M$ факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}_2$, переставляющей сомножители. Обозначим через $\Delta_M \subset M^{(2)}$ диагональ. Поскольку функция r^2 симметрична относительно перестановки сомножителей, она опускается на $M^{(2)}$. Более того, дополнение $M^{(2)} \setminus \Delta_M$ является гладким (некомпактным) многообразием, а функция r^2 является морсовской функцией на этом многообразии. Применяя теорию Морса к этой функции, мы заключаем, что число диаметров (т.е. число изолированных критических точек этой функции) не меньше суммарного числа Бетти пары $(M^{(2)}, \Delta_M)$ (поскольку при прохождении каждого критического значения ранг группы гомологий множества меньших значений функции может увеличиться не более, чем на единицу). Более строго, теорию Морса нужно применять к паре $(X, \partial X)$ где многообразие с краем $X \subset M^{(2)}$, задается неравенством $r^2 \geqslant \varepsilon$, и где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что дополнение $U = M^{(2)} \setminus X$ является трубчатой окрестностью диагонали, не содержащей изолированных критических точек. Тогда U стягивается на диагональ, так что когомологии пары $(X, \partial X)$ могут быть заменены на изоморфные им когомологии пары $(M^{(2)}, \Delta_M)$.

Поэтому теорема Пушкаря является следствием следующей.

Теорема 16.2. *Сумма* $(\mathrm{mod}\, 2)$-*чисел Бетти пары* $(M^{(2)}, \Delta_X)$ *однозначно определяется суммой чисел Бетти многообразия* M *и его размерностью*:

$$\sum_k \dim H^k(M^{(2)}, \Delta_X) = \frac{B\,(B-1)}{2} + \frac{n\,B}{2}.$$

Замечу, что по двойственности Пуанкаре сумма чисел Бетти пары $(M^{(2)}, \Delta_X)$ равна сумме чисел Бетти гладкого некомпактного многообразия $M^{(2)} \setminus \Delta_X$. Когомологии пары $(M^{(2)}, \Delta_M)$ вычисляются за несколько шагов.

Шаг 1. Выберем сферу S^K большой размерности $K \gg 2\dim M$, рассмотрим прямое произведение $M \times M \times S^K$ и зададим на нем диагональное действие группы $\mathbb{Z}_2$, при котором образующая группы действует на $M \times M$ перестановкой сомножителей, а на S^K – антиподальной инволюцией, $x \mapsto -x$. Обозначим через V факторпространство по этому действию и через W его подпространство, полученное факторизацией по этому же действию подмногообразия $\Delta_M \times S^K \subset M \times M \times S^K$. Заметим, что после домножения на сферу действие группы $\mathbb{Z}_2$ стало свободным, поэтому V является гладким компактным многообразием, а W – его подмногообразием коразмерности n.

Назовем *областью стабильных размерностей* отрезок значений $k = 0, 1, \dots, K-1$.

Лемма 16.3. *В области стабильных размерностей когомологии пары* $(M^{(2)}, \Delta_M)$ *изоморфны когомологиям пары* (V, W),

$$\dim H^k(M^{(2)}, \Delta_M) = \dim H^k(V, W), \qquad k < K.$$

Иными словами, числа Бетти $b_k(V, W)$ повторяют числа Бетти $b_k(M^{(2)}, \Delta_M)$ при $k \leqslant 2n$ и равны нулю при $2n < k < K$.

Заменим пару $(M^{(2)}, \Delta_M)$ на имеющую изоморфные когомологии пару $(X, \partial X)$, где $X \subset M^{(2)}$ задается неравенством $r^2 \geqslant \varepsilon$, а пару (V, W) на имеющую изоморфные когомологии пару $(\widetilde{X}, \partial\widetilde{X})$, где $\widetilde{X} = \pi_1^{-1}(X)$ и где $\pi_1 \colon V \to M^{(2)}$ задается естественной проекцией $M \times M \times S^K \to M \times M$.

Ограничение на $\widetilde{X}$ отображения π_1 является локально тривиальным расслоением со слоем S^K. Спектральная последовательность этого расслоения состоит из двух строк, расположенных настолько далеко друг от друга, что между ними не может быть никаких нетривиальных дифференциалов по соображениям размерностей. Следовательно, отображение π_1 индуцирует изоморфизм когомологий пространств X и $\widetilde{X}$, и по аналогичным соображениям, пространств ∂X и $\partial\widetilde{X}$. Следовательно, по лемме о пяти гомоморфизмах, π_1 индуцирует изоморфизм и относительных гомологий.

Шаг 2. Когомологии пары (V, W) вычисляются, в свою очередь, из длинной точной последовательности этой пары. Для вычисления когомологий многообразий V и W рассмотрим вторую проекцию $\pi_2 \colon V \to \mathbb{R}P^K$, задаваемую естественной проекцией $M \times M \times S^K \to S^K$ на последний сомножитель. Отображение π_2 является локально тривиальным расслоением со слоем, изоморфным $M \times M$. Это расслоение нетривиально: обход вдоль образующей группы $\pi_1(\mathbb{R}P^K) = \mathbb{Z}_2$ соответствует перестановке сомножителей произведения $M \times M$. Ограничение расслоения π_2 на подмногообразие W является подрасслоением со слоем Δ_M, изоморфным M, которое уже является тривиальным. Отсюда мы заключаем

$$H^*(W) = H^*(M \times \mathbb{R}P^K) = H^*(M) \otimes H^*(\mathbb{R}P^K).$$

В области стабильных размерностей, которая только нас и интересует, последнее равенство удобно записать в виде

$$H^*(W) = H^*(M) \otimes \mathbb{Z}_2[t],$$

где мы обозначили через t класс гиперплоскости в $\mathbb{R}P^K$ (поднятый в W посредством π_2). Иными словами, *в области стабильных размерностей $H^*(W)$ как модуль над кольцом $\mathbb{Z}_2[t]$ является свободным, и его образующие взаимно однозначно соответ-*

ствуют базисным элементам пространства когомологий многообразия M.

В частности, числа Бетти $b_k(W)$ многообразия W растут при $k \leqslant n$ и равны B при $k \geqslant n$.

Шаг 3. Когомологии многообразия V мы также будем вычислять как модуль над кольцом $\mathbb{Z}_2[t]$. Для его вычисления мы воспользуемся спектральной последовательностью расслоения $\pi_2\colon V \to \mathbb{R}P^K$. Основная трудность состоит в том, что это расслоение не является гомологически простым. Действительно, в качестве базиса в группе когомологий слоя $M \times M$ можно взять классы вида $\sigma_i \times \sigma_j$, где классы σ_i, $i = 1, \ldots, B$, задают базис когомологий многообразия M. Образующая группы $\pi_1(\mathbb{R}P^K) = \mathbb{Z}_2$ действует неподвижно на классах вида $\sigma_i \times \sigma_i$ и переставляет между собой классы $\sigma_i \times \sigma_j$ и $\sigma_j \times \sigma_i$ при $i \neq j$.

Каждый класс вида $\sigma_i \times \sigma_i$ *задает подгруппу в члене* E_2, *изоморфную* $\mathbb{Z}_2[t]$ (в области стабильных размерностей), расположенную в строке с номером $q = 2\dim \sigma_i$.

Вклад в E_2 каждой подгруппы вида $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, порожденной классами $\sigma_i \times \sigma_j$ и $\sigma_j \times \sigma_i$, изоморфен соответствующей *группе когомологий пространства* $\mathbb{R}P^K$ *с локально постоянной системой коэффициентов* $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. По определению, локально постоянная система коэффициентов – это абелева группа с заданным на ней действием фундаментальной группы объемлющего топологического пространства. Не вдаваясь в подробности определения когомологий с локально постоянными коэффициентами, объясним, как их можно вычислять. Для этого достаточно рассмотреть модельный пример, приводящий к той же системе коэффициентов, но с известным заранее ответом. В качестве такого примера рассмотрим двулистное накрытие $S^K \to \mathbb{R}P^K$. Если рассматривать это накрытие как локально тривиальное расслоение, то спектральная последовательность этого расслоения приводит в точности к когомологиям $\mathbb{R}P^K$ с системой коэффициентов $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, на которой группа $\pi_1(\mathbb{R}P^K)$ действует перестановкой слагаемых. Нам заранее известно, что в качестве ответа в данном случае выступают когомологии пространства S^K расслоения, изоморфные $\mathbb{Z}_2$ в размерностях 0 и K и тривиальные в остальных размерностях.

Отсюда мы делаем следующий вывод: *подгруппа когомологий слоя расслоения* π_2, *порожденная классами* $\sigma_i \times \sigma_j$ *и* $\sigma_j \times \sigma_i$, *дает* *прямое слагаемое* $\mathbb{Z}_2$ *в член* E_2 *спектральной последовательности расслоения* (в области стабильных размерностей), расположенное в клетке с координатами $p = 0$ и $q = \dim \sigma_i + \dim \sigma_j$.

Начальный член спектральной последовательности расслоения π_2 полностью определен.

Шаг 4. Я утверждаю, что все высшие дифференциалы в спектральной последовательности расслоения π_2 равны нулю и эта последовательность вырождается в начальном члене: $E_2^{*,*} = E_\infty^{*,*} \simeq H^*(V)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно каждую образующую члена E_2 представить настоящим замкнутым коциклом на многообразии V. Тогда из замкнутости коциклов вытекает равенство нулю всех дифференциалов. Эти коциклы удобнее предъявлять геометрически, используя двойственный язык гомологий.

Зафиксируем для каждого базисного класса когомологий $\sigma_i \in H^*(M)$ замкнутый цикл $C_i \subset M$, представляющий двойственный класс гомологий. Тогда подмножество $C_i \times C_i \times S^m \subset M \times M \times S^K$ инвариантно относительно действия группы $\mathbb{Z}_2$ и его фактор по действию группы задает цикл, представляющий класс первого вида в члене E_2 спектральной последовательности и имеющий носитель в $\pi_2^{-1}(\mathbb{R}P^m) \subset V$.

Аналогично, факторпространство объединения циклов $C_i \times C_j \times S^K$ и $C_j \times C_i \times S^K$ по действию группы $\mathbb{Z}_2$ задает цикл, представляющий класс второго вида.

Таким образом, описание члена E_2 спектральной последовательности, приведенное на предыдущем шаге, является, по существу, описанием предельных когомологий многообразия V.

Подытожим наши вычисления. *Пространство* $H^*(V)$ *является суммой двух подпространств. Первое подпространство является свободным (в области стабильных размерностей)* $\mathbb{Z}_2[t]$*-модулем, образующие которого взаимно однозначно соответствуют базисным элементам* σ_i *пространства когомологий многообразия* M *(при этом образующая, соответствующая классу* σ_i *имеет размерность* $2\dim\sigma_i$*). Второе подпространство имеет размерность* $B\,(B-1)/2$ *и на нем кольцо* $\mathbb{Z}_2[t]$ *действует тривиально.*

Шаг 5. Для использования длинной точной последовательности пары (V, W) необходимо знать еще гомоморфизм $i^*\colon H^k(V) \to H^k(W)$, индуцированный вложением $i\colon W \to V$. Из естественности умножения в когомологиях вытекает, что этот гомоморфизм коммутирует с умножением на класс t. Таким образом, этот гомоморфизм достаточно вычислить на классах когомологий, порождающих $H^*(V)$ как $\mathbb{Z}_2[t]$-модуль. Кроме того, из тривиальности групп $H^k(V,W)$ при $k > 2\,n$ вытекает, что гомоморфизм i^* является изоморфизмом при $k > 2\,n$.

В результате мы, практически без вычислений, приходим к следующему выводу. *На подгруппе в* $H^*(V)$, *состоящей из классов первого вида*, *гомоморфизм* i_* *инъективен* (иначе он не был бы изоморфизмом при $k > 2n$). *На подгруппе*, *состоящей из классов второго вида*, *этот гомоморфизм тривиален* (противоположное противоречило бы перестановочности с умножением на t).

Шаг 6. Из описания гомоморфизма i^* мгновенно выводится размерность его ядра и коядра:

$$\dim \operatorname{Ker} i^* = \frac{B\,(B-1)}{2},$$
$$\dim \operatorname{coker} i^* = \sum_{i=1}^{B} (2\,\dim \sigma_i - \dim \sigma_i) = \sum_{j=1}^{n} j\, b_j(M).$$

При помощи двойственности Пуанкаре последнюю сумму можно упростить,

$$\sum_{j=1}^{n} j\, b_j(M) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j\, b_j(M) + (n-j)\, b_{n-j}(M))$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} n\, b_j(M) = \frac{n\,B}{2}.$$

Поэтому из длинной точной последовательности пары (V,W) мы получаем окончательный ответ

$$\dim H^*(V,W) = \dim \operatorname{Ker} i^* + \dim \operatorname{coker} i^* = \frac{B\,(B-1)}{2} + \frac{n\,B}{2}.$$

Задача 16.4. Вычислите многочлен Пуанкаре

$$\sum b_i(M^{(2)}, \Delta_M)\, x^i$$

пары $(M^{(2)}, \Delta_M)$, исходя из известного многочлена Пуанкаре $\sum b_i(M)\, x^i$ многообразия M.

17 Пространство Эйленберга–Маклейна как классифицирующее пространство гомологий

Имеется еще один подход к теории (ко)гомологий, наиболее близкий к современной точке зрения, согласно которому для каждой абелевой группы π и натурального $n \geqslant 1$ определяется раз и навсегда некоторое топологическое пространство $K(\pi, n)$. После этого для произвольного топологического пространства X в качестве группы $H^n(X, \pi)$ когомологий с коэффициентами в π берется множество гомотопических классов отображений X в $K(\pi, n)$:

$$H^n(X, \pi) = [X, K(\pi, n)]$$

(мы пока опускаем способ, с помощью которого на множестве гомотопических классов отображений вводится структура группы). Иными словами, всякому классу когомологий из группы $H^n(X, \pi)$ взаимно однозначно соответствует непрерывное отображение (называемое *классифицирующим*) $\varkappa\colon X \to K(\pi, n)$, определенное однозначно с точностью до гомотопии. Прежде, чем сформулировать соответствующую теорему, посмотрим, какими свойствами должно обладать пространство $K(\pi, n)$.

Прежде всего, у этого пространства имеется выделенный класс когомологий $u \in H^n(K(\pi, n), \pi)$. Это класс, соответствующий тождественному отображению $K(\pi, n) \to K(\pi, n)$, рассматриваемому как классифицирующему. Этот класс называется *фундаментальным.* Из функториальности следует, что класс когомологий на X, сопоставляемый классифицирующему отображению $\varkappa\colon X \to K(\pi, n)$, равен $\varkappa^* u \in H^n(X, \pi)$.

Из универсальности пространства $K(\pi, n)$ следует его единственность с точностью до гомотопической эквивалентности. Действительно, если K' – другое пространство, служащее в качестве классифицирующего для когомологий размерности n с коэффициентами в π, то гомотопическая эквивалентность $K(\pi, n) \to K'$ доставляется отображением, классифицирующим фундаментальный класс.

Возьмем теперь в качестве X сферу S^k. Из известных когомологий сферы вытекает, что множество гомотопических классов отображений $S^k \to K(\pi, n)$ состоит из одного элемента (стягиваемого отображения) при $k \neq n$ и взаимно однозначно соответствует элементам группы $\pi = H^n(S^n, \pi)$ при $k = n$. Иными словами, все гомотопические группы пространства $K(\pi, n)$, кроме одной, тривиальны[4].

Определение 17.1. *Пространством Эйленберга–Маклейна* $K(\pi, n)$ называется клеточное пространство, у которого все гомотопические группы, кроме одной, тривиальны:

$$\pi_k(K(\pi, n)) = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \pi, & k = n. \end{cases}$$

Задача 17.2. Докажите, что следующие пространства являются пространствами Эйленберга–Маклейна

$$S^1 = K(\mathbb{Z}, 1), \qquad \mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1), \qquad \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2).$$

Существование пространства $K(\pi, n)$ для произвольных π и n вытекает из приведенной ниже его явной конструкции. Мы будем строить это пространство остов за остовом, добавляя по очереди клетки все больших размерностей. В качестве начального n-мерного остова sk^n мы берем букет n-мерных сфер, по одной для каждой образующей группы π. В результате мы получаем сюръективное отображение $\pi_n(\mathrm{sk}^n) \to \pi$. Рассмотрим произвольную систему образующих ядра этого гомоморфизма. Каждая из этих образующих представляется некоторым отображением $S^n \to \mathrm{sk}^n$,

[4]Напомним, что k-й гомотопической группой $\pi_k(X, x_0)$ связного пространства X называется множество гомотопических классов отображений $S^k \to X$, переводящих заданную точку сферы в заданную точку x_0 пространства X. При разном выборе точки x_0 гомотопические группы изоморфны, однако этот изоморфизм не является каноническим. Более точно, имеется естественное действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на группе $\pi_k(X, x_0)$, и изоморфизм групп $\pi_k(X, x)$ для различных x определен с точностью до этого действия. В частности, если это действие тривиально (например, если пространство односвязно), то изоморфизм уже является каноническим и указание на точку x_0 можно опускать из обозначения гомотопических групп.

Напомним также определение групповой операции в $\pi_k(X, x_0)$. Заметим, что элемент группы $\pi_k(X, x_0)$ может быть представлен отображением k-мерного шара $B^k \to X$, переводящим всю границу ∂B^k в точку x_0. Рассмотрим теперь в шаре B^k два вложенных непересекающихся шара B_1 и B_2 меньших размеров. Сумма двух элементов гомотопической группы $\pi_k(X, x_0)$, представленных отображениями f_1 и f_2, задается отображением $B^k \to X$, которое дополнение к шарам B_1 и B_2 переводит в точку x_0, а внутри шаров совпадает с отображениями f_1 и f_2, соответственно (перемасштабированными соответствующим образом). Из этого определения мгновенно вытекает ассоциативность гомотопических групп, а также их коммутативность при $k > 1$.

которое можно использовать как характеристическое для приклеивания $(n+1)$-мерной клетки. В получившемся после такой приклейки пространстве sk^{n+1} образующие ядра гомоморфизма $\pi_n(\mathrm{sk}^n) \to \pi$ стягиваются, поэтому $\pi_n(\mathrm{sk}^{n+1}) = \pi$.

Мы уже получили необходимую n-ю гомотопическую группу. Однако высшие гомотопические группы построенного пространства sk^{n+1} могут оказаться произвольными. Приклеив $(n+2)$-мерные клетки вдоль отображений, задающих образующие группы $\pi_{n+1}(\mathrm{sk}^{n+1})$, мы убиваем $(n+1)$-ю гомотопическую группу, и т.д., на каждом последующем шаге мы убиваем гомотопические группы со все большими и большими номерами, и в пределе получаем пространство, обладающее заданными свойствами.

Заметим, что в процессе убивания высших гомотопических групп группы с меньшими номерами не меняются: по лемме о клеточной аппроксимации всякий элемент группы $\pi_k(X)$ реализуется отображением $S^k \to X$, образ которого лежит в k-мерном остове пространства X, а всякую гомотопию таких отображений можно реализовать в $(k+1)$-мерном остове. Поэтому приклеивание клеток размерности $\geqslant (k+2)$ не меняет k-й гомотопической группы пространства.

Несмотря на явность, приведенная конструкция пространства Эйленберга–Маклейна бесполезна для определения его топологии: гомотопические группы, участвующие в его построении, неизвестны.

Единственность пространства $K(\pi, n)$ с точностью до гомотопической эквивалентности вытекает из его универсальности, как это уже обсуждалось выше.

Теорема 17.3. *Пространство Эйленберга–Маклейна является классифицирующим пространством для когомологий, а именно, для всякого клеточного пространства X имеется взаимно однозначное соответствие между элементами группы $H^n(X, \pi)$ и гомотопическими классами отображения X в пространство $K(\pi, n)$.*

Доказательство теоремы прямолинейное: по всякому классу n-мерных когомологий на X нужно построить классифицирующее отображение $\varkappa\colon X \to K(\pi, n)$, для которого обратный образ фундаментального класса совпадает с заданным. Рассуждения, используемые при построении такого отображения, имеют название «теория препятствий». Для начала заметим, что по лемме о клеточной аппроксимации всякое отображение $X \to K(\pi, n)$ гомотопно отображению, отправляющему $(n-1)$-мерный остов пространства X в точку. Поэтому мы с самого начала можем считать, что строемое отображение $\varkappa$ постоянно на $(n-1)$-мерном остове.

Для продолжения отображения на n-мерный остов нужно для каждой n-мерной клетки задать отображение n-мерной сферы в $K(\pi, n)$, т.е. задать элемент группы $\pi_n(K(\pi, n)) = \pi$. Соответствие, сопоставляющее каждой n-мерной клетке элемента группы π можно рассматривать как клеточную n-коцепь на X со значениями в π. В качестве такой коцепи нужно выбрать коцепь a, представляющую заданный класс когомологий.

Поскольку на n-мерном остове отображение $\varkappa$ уже построено, оно построено на границе всякой $(n+1)$-мерной клетки и представлено некоторым элементом группы $\pi_n(K(\pi, n)) = \pi$. В результате, мы получаем $(n+1)$-коцепь b со значениями в π. Эта коцепь называется *препятствующей* для продолжения отображения $\varkappa$ на $(n{+}1)$-мерный остов: для возможности такого продолжения коцепь b должна быть нулевой (продолжение отображения с границы клетки внутрь задает затягивание образа границы).

В нашем случае несложно установить равенство $b = \delta a$, иными словами, равенство нулю препятствующей коцепи b эквивалентно замкнутости коцепи a. По построению, коцепь a замкнута, так что строемое отображение на $(n+1)$-мерный остов продолжается.

При продолжении отображения $\varkappa$ на следующие остовы препятствий уже не возникает, поскольку они лежат в высших гомотопических группах пространства $K(\pi, n)$, которые тривиальны.

Аналогичным образом проверяется, что при замене отображения $\varkappa$ на гомотопное коцикл a меняется на когомологичный. Таким образом, гомотопический класс отображения $\varkappa\colon X \to K(\pi, n)$ однозначно определяется классом когомологий, представленным коцепью a.

Пример 17.4. Всякий класс одномерных или двумерных когомологий $H^1(M, \mathbb{Z})$, $H^2(M, \mathbb{Z})$ на гладком многообразии может быть представлен как класс, двойственный гладкому подмногообразию коразмерности один, или два, соответственно (в отличие от старших когомологий, которые не всегда представляются гладкими подмногообразиями). Действительно, рассматриваемый класс задается прообразом при характеристическом отображении подмногообразия, представляющего фундаментальный класс соответствующего пространства Эйленберга–Маклейна (точки на окружности $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$ или комплексной гиперплоскости в проективном пространстве $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$).

18 Гомологии и гомотопии

В этом пункте мы приведем несколько примеров, демонстрирующих применение гомологий для вычисления гомотопических групп. Идея описываемого ниже метода принадлежит Серру. Слушатели, которые сталкиваются впервые с задачей вычисления гомотопических групп, не сумеют оценить ту легкость, с которой этот метод приводит к ответу (в сравнении с прямыми геометрическими рассуждениями).

Первым результатом, связывающим гомотопии и гомологии, является следующая **теорема Гуревича**.

Теорема 18.1. *У связного топологического пространства X первые $(n-1)$ гомотопических групп тривиальны тогда и только тогда, когда первые $(n-1)$ гомологических групп тривиальны,*

$$\pi_1(X) = \cdots = \pi_{n-1}(X) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0.$$

При этом первая нетривиальная гомотопическая группа и первая нетривиальная гомологическая группы изоморфны,

$$\pi_n(X) \simeq H_n(X), \quad n > 1.$$

При $n = 1$ соответствие между группами $\pi_1(X)$ и $H_1(X)$ имеет вид

$$H_1(X) \simeq \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Иными словами, группа $H_1(X)$ получается из группы $\pi_1(X)$ добавлением соотношений коммутативности на ее элементы.

Пространство, у которого первые n гомотопических (или гомологических) групп тривиальны, называется *n-связным.* Примерами n-связных пространств служат сферы S^k, $k > n$, пространства Эйленберга–Маклейна $K(\pi, k)$, $k > n$. При удалении из n-связного многообразия подмногообразия коразмерности, не меньшей, чем $n + 2$, оно остается n-связным.

Одно из возможных доказательств теоремы состоит в применении теории препятствий. Предположим, что пространство X является $(n-1)$-связным, т.е. что $\pi_i(X) = 0$ при $i \leqslant n-1$. Тогда тождественное отображение $X \to X$ гомотопно отображению, переводящему $(n-1)$-мерный остов в точку (для такой гомотопии нет никаких препятствий, см. доказательство теоремы 17.3). Отсюда следует, что тождественный гомоморфизм в себя гомологий $H_i(X)$ при $i \leqslant n-1$ является нулевым, т.е. сами эти группы нулевые. Кроме того, поскольку граница всякой n-мерной клетки после такой гомотопии отображается в точку, всякий n-мерный цикл представляется линейной комбинацией отображений сфер, т.е. некоторым элементом гомотопической группы. Продумывание деталей я оставляю слушателям.

Метод Серра вычисления гомотопических групп состоит в построении такого пространства $X_{(n)}$, у которого гомотопические группы $\pi_k(X_{(n)})$ изоморфны гомотопическим группам исходного пространства X при $k \geqslant n$, а при $k < n$ эти группы тривиальны. Тогда искомая гомотопическая группа является первой нетривиальной, и по теореме Гуревича мы получаем

$$\pi_n(X) = \pi_n(X_{(n)}) = H_n(X_{(n)}),$$

а для вычисления гомологических групп у нас имеется развитый аппарат спектральных последовательностей.

Построение пространства $X_{(n)}$ основано на следующем важном наблюдении: *всякое отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств гомотопически эквивалентно расслоению.* А именно, пространство X нужно заменить на гомотопически ему эквивалентное пространство $\widetilde{X}$, образованное парами вида (x, γ), где $x \in X$ и γ – произвольный путь на Y с началом в точке $f(x)$, а отображение f нужно заменить на отображение $\tilde{f}\colon \widetilde{X} \to Y$, сопоставляющее всякому пути на Y его *конец*.

Тот факт, что получившееся пространство $\widetilde{X}$ является бесконечномерным, не должен смущать. Гораздо более содержательная трудность заключается в том, что отображение $\tilde{f}$ не является в прямом смысле локально тривиальным расслоением. Тем не менее, для него выполняется фундаментальное *свойство поднимающей гомотопии*, из чего следует, что к нему применимы все алгебраические методы, применимые к локально тривиальным расслоениям (длинная точная последовательность гомотопических групп[5], а также спектральная последовательность гомологий и когомологий). Говорят, что $\tilde{f}$ является *расслоением в*

[5]Напомним, что гомотопические группы базы B, тотального пространства E и слоя F локально тривиального расслоения (и как мы видим сейчас,

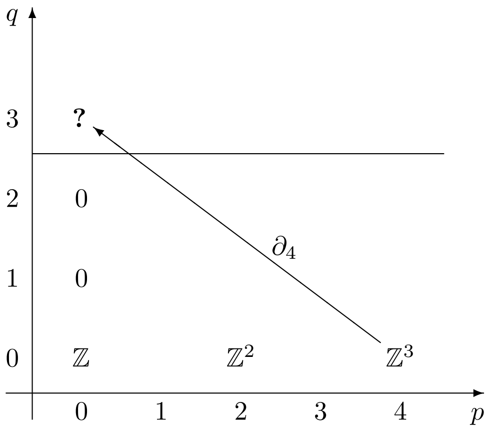
смысле Серра или просто расслоением Серра. Слои расслоения Серра не обязательно гомеоморфны друг другу, но являются гомотопически эквивалентными.

Пример 18.2. Вычислим третью гомотопическую группу $\pi_3(S^2 \vee S^2)$ букета двух сфер. Рассмотрим естественное вложение $S^2 = \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^\infty$ и индуцированное этим вложением диагональное вложение $f\colon S^2 \vee S^2 \to \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$. Превратим это вложение в расслоение Серра и обозначим через F его слой.

Отображение f индуцирует изоморфизм вторых гомологических (а следовательно, гомотопических) групп, поэтому слой F расслоения Серра является 2-связным. С другой стороны, база этого расслоения является пространством Эйленберга–Маклейна $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, 2)$. Поэтому высшие гомотопические группы (начиная с третьей) у пространства F такие же, как у $S^2 \vee S^2$,

$$\pi_3(S^2 \vee S^2) = \pi_3(F) = H_3(F).$$

Опишем спектральную последовательность рассматриваемого расслоения Серра.



Нулевая строка начального члена известна: она изоморфна гомологиям базы $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$. В частности, ранги групп $E^1_{2,0}$ и

произвольного расслоения Серра) связаны длинной точной последовательностью

$$\cdots \to \pi_{k+1}(B) \to \pi_k(F) \to \pi_k(E) \to \pi_k(B) \to \pi_{k-1}(F) \to \cdots .$$

$E^1_{4,0}$ равны 2 и 3, соответственно. Строки $q = 1$ и $q = 2$ тривиальны, поскольку слой F, по построению, двусвязен (на рисунке эти строки отделены линией). Кроме того, нам известно, что последовательность сходится к гомологиям пространства $S^2 \vee S^2$. Поэтому группа $E^2_{4,0} = \mathbb{Z}^3$ должна быть убита высшими дифференциалами. Единственный возможный нетривиальный дифференциал, который может убить эту группу, это $\partial_4 \colon E^4_{3,0} \to E^4_{0,4}$, откуда мы заключаем

$$\pi_3(S^2 \vee S^2) = H_3(F) = E^2_{0,3} = E^4_{3,0} = \mathbb{Z}^3.$$

Инварианты, различающие элементы группы $\pi_3(S^2 \vee S^2)$ имеют наглядный геометрический смысл. Пусть задано отображение $f \colon S^3 \to S^2 \vee S^2$. Обозначим через $f_i \colon S^3 \to S^2$, $i = 1, 2$, композицию отображения f с проекцией, стягивающей вторую (соответственно, первую) сферу S^2. Тогда в качестве трех базисных инвариантов отображения f можно выбрать инварианты Хопфа отображений f_1 и f_2, определяемые как индексы зацепления двух слоев общего положения, а также индекс зацепления общего слоя отображения f_1 с общим слоем отображения f_2.

Конструкцию расслоения Серра $\tilde{f} \colon \widetilde{X} \to Y$, построенного по отображению $f \colon X \to Y$, можно итерировать. Рассмотрим вложение слоя $i \colon F \to \widetilde{X}$ и превратим его опять в расслоение $\tilde{i} \colon \widetilde{F} \to \widetilde{X}$. В результате мы получаем расслоение Серра, пространство $\widetilde{F}$ которого гомотопически эквивалентно F, а база $\widetilde{X}$ гомотопически эквивалентна X.

Задача 18.3. Докажите, что слой расслоения $\tilde{i}$ гомотопически эквивалентен пространству петель ΩY, т.е. пространству непрерывных отображений $\gamma \colon [0, 1] \to Y$, таких, что $\gamma(0) = \gamma(1) = y_0$ – фиксированная точка в Y.

Пространство петель ΩY получается также как слой расслоения Серра, построенного по вложению точки $* \to Y$. Тотальное пространство этого расслоения стягиваемо, поэтому гомотопические группы пространства ΩY изоморфны гомотопическим группам исходного пространства Y со сдвигом градуировки на 1: $\pi_k(\Omega Y) = \pi_{k+1}(Y)$. Отсюда следует, что длинные точные последовательности расслоений Серра $\tilde{f}$ и $\tilde{i}$ изоморфны с точностью до изменения обозначений:

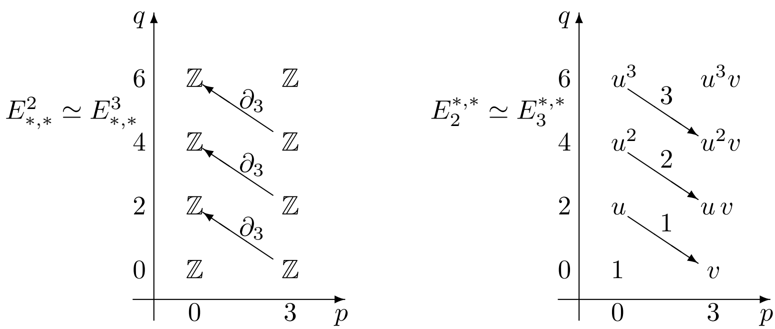
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_k(\widetilde{X}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_k(Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_k(\widetilde{F}) \arrow[r] & \pi_k(\widetilde{X}) \arrow[r] & \pi_{k-1}(\Omega Y) \arrow[r] & \pi_{k-1}(\widetilde{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Задача 18.4. Докажите гомотопическую эквивалентность $K(\pi, n-1) \sim \Omega K(\pi, n)$. Например, $\Omega\mathbb{C}P^\infty \sim S^1$.

Пример 18.5. Вычислим группу $\pi_4(S^3)$. Рассмотрим классифицирующее отображение $\varkappa\colon S^3 \to K(\mathbb{Z}, 3)$, соответствующее образующей группы $H^3(S^3) = \mathbb{Z}$, превратим его в расслоение Серра и обозначим слой через F. Из гомотопической точной последовательности этого расслоения вытекает, что F является 3-связным, а при $k \geqslant 4$ имеется изоморфизм $\pi_k(F) = \pi_k(S^3)$. В частности,

$$\pi_4(S^3) = \pi_4(F) = H_4(F).$$

Для вычислений гомологий пространства F технически более удобно пользоваться итерированной конструкцией расслоения Серра, при которой пространство F (точнее, гомотопически ему эквивалентное) выступает в роли тотального пространства, а сфера S^3 – в роли базы расслоения. Слой этого расслоении гомотопически эквивалентен пространству $\Omega K(\mathbb{Z}, 3) = K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$. Начальный член спектральной последовательности этого расслоения изображен на рисунке. Мы знаем, что дифференциал



$\partial_3\colon E^3_{3,0} \to E^3_{0,2}$ является изоморфизмом (в противном случае пространство F не получилось бы 3-связным). Информацию же о дифференциалах $\partial_3\colon E^3_{3,2k} \to E^3_{0,2k+2}$ при $k > 0$ из рассмотрения только лишь гомологической спектральной последовательности нам извлечь не удастся. Поэтому воспользуемся когомологической спектральной последовательностью и ее мультипликативными свойствами. Обозначим через $u \in H^2(\mathbb{C}P^\infty) = E_2^{0,2}$ мультипликативную образующую когомологий слоя, и через $v = \delta_3(u) \in E_2^{3,0} = H^3(S^3)$ образующую третьих когомологий базы. Тогда

$$\delta_3(u^k) = k\, u^{k-1}\, \delta_3(u) = k\, u^{k-1}\, v,$$

т.е. гомоморфизм $\delta_3\colon E_3^{0,2k} \to E_3^{3,2k-2}$ является изоморфизмом на подгруппу индекса k. Отсюда мы получаем описание когомологий пространства F, в частности, $H^5(F) = E_\infty^{3,2} = \mathbb{Z}_2$. Из формулы универсальных коэффициентов, или из двойственного описания дифференциала в гомологической спектральной последовательности, мы находим, окончательно,

$$\pi_4(S^3) = H_4(F) = \mathbb{Z}_2.$$

19 Грассманианы и исчисление Шуберта

В этом пункте мы в качестве еще одного примера работы с когомологиями приведем описание умножения в когомологиях конкретного многообразия – комплексного многообразия Грассмана. Кольцо когомологий грассманиана имеет многочисленные применения в самых разных областях математики: проективной комплексной геометрии, теории характеристических классов, теории представлений, интегрируемых системах. К сожалению, все эти связи останутся за рамками наших лекций, поскольку каждая из этих тем является предметом самостоятельного курса.

Многообразием Грассмана, или *грассманианом* $G_{k,n}$ называется пространство всех k-мерных прдпространств в n-мерном векторном пространстве. Для определенности, мы будем рассматривать *комплексный* грассманиан, т.е. мы предполагаем объемлющее пространство и его подпространства комплексными. Многообразие Грассмана является гладким (и даже голоморфным) многообразием комплексной размерности $n(n-k)$ (это станет ясно чуть ниже). Многообразие Грассмана обладает естественным клеточным разбиением, аналогичным стандартному клеточному разбиению проективного пространства. Это разбиение называется *шубертовским*.

Точки грассманиана удобно представлять прямоугольными матрицами размера $k \times n$, имеющими максимально возможный ранг k: каждая такая матрица задает k-мерную плоскость, являющуюся линейной оболочкой своих строк. Матрица определена с точностью до умножения слева на невырожденную матрицу размера $k \times k$, то есть с точностью до линейного преобразования строк. Действуя линейными преобразованиями строк, всякую матрицу можно привести однозначно к одной из следующих «треугольных» форм:

$$\begin{pmatrix} * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & \dots & & & & \dots & & & & \dots & \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

А именно, имеется набор столбцов с номерами $m_1 < m_2 < \dots < m_k$, таких, что матрица, составленная из этих столбцов, является единичной матрицей; правее единиц из этих столбцов всюду стоят нули, а во всех оставшихся местах стоят произвольные комплексные числа. Действительно, m_k определяется как минимальный номер m из тех, для которых подматрица, составленная из последних $n-m$ столбцов нулевая, m_{k-1} определяется как минимальный номер m из тех, для которых подматрица, составленная из последних $n-m$ столбцов, имеет ранг $\leqslant 1$, и т.д.

Множество плоскостей, приводящихся к указанной нормальной форме с фиксированными $m_1, \dots, m_k$, образует открытую клетку (координатами в этой клетке служат комплексные числа, обозначенные звездочками). Минимальную возможную размерность 0 имеет клетка, отвечающая набору столбцов с номерами $(1, \dots, k)$, а максимальную вещественную размерность $2\,k\,(n-k)$ – клетка, отвечающая набору столбцов с номерами $(n-k+1, \dots, n)$.

Клетки построенного разбиения называются *клетками Шуберта.* В более инвариантных терминах для определения клеток Шуберта нужно зафиксировать в объемлющем пространстве $\mathbb{C}^n$ полный флаг

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = \mathbb{C}^n, \qquad \dim F_i = i.$$

Тогда клетка Шуберта, отвечающая набору столбцов с номерами $m_1, \dots, m_k$, образована k-мерными плоскостями ℓ, подчиняющимися условию

$$\dim(\ell \cap F_{m_i - 1}) = i - 1, \qquad \dim(\ell \cap F_{m_i}) = i, \qquad i = 1, \dots, k.$$

Все клетки Шуберта имеют четную вещественную размерность. Следовательно, в цепном комплексе этого клеточного разбиения все дифференциалы нулевые и классы клеток Шуберта задают аддитивный базис гомологий грассманиана. В частности, кручение в гомологиях (комплексных) грассманианов отсутствует. Общее количество клеток равно количеству способов выбрать k различных столбцов из n возможных, откуда мы заключаем,

$$\chi(G_{k,n}) = \sum_{i=0}^{k\,(n-k)} b_{2i} = C_n^k.$$

В когомологиях кручение также отсутсвует, а поскольку все классы имеют четную вещественную размерность, умножение *коммутативно*. Двойственный аддитивный базис в когомологиях образован классами, двойственными замыканиям клеток Шуберта. Замыкание клетки Шуберта называется соответствующим *циклом Шуберта*. Всякий цикл Шуберта является алгебраическим и, вообще говоря, особым, подмногообразием грассманиана. Действительно, условие на размерность пересечений с плоскостями флага записывается как обращение в ноль соответствующих миноров, которые являются полиномиальными выражениями от компонент матрицы.

Для дальнейшего удобно несколько изменить обозначение циклов Шуберта, а именно, вместо набора чисел $(m_1, \ldots, m_k)$ мы будем рассматривать набор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, компоненты которого определяются равенствами

$$\lambda_i = n + 1 - i - m_{k+1-i}.$$

Иными словами, мы сперва вычисляем разницу набора $(n - k + 1, \ldots, n)$, отвечающего типичной точке грассманиана и набора $(m_1, \ldots, m_k)$, отвечающего данной клетке, а затем записываем получившиеся k чисел разницы в обратном (невозрастающем) порядке. Построенный набор удовлетворяет неравенствам $n - k \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0$. Такой набор удобно изображать *диаграммой Юнга* – таблицей, состоящей из λ_i клеток в i-м столбце.

Цикл Шуберта, соответствующий диаграмме Юнга λ, обозначается через σ_λ. Использование диаграмм Юнга для нумерации клеток Шуберта имеет важное свойство *стабилизации*:

дописывая или вычеркивая некоторое количество столбцов нулевой длины, можно одной и той же диаграмме Юнга λ сопоставлять клетки Шуберта в грассманианах $G_{k,n}$ с различными k и n. При этом многие соотношения между циклами Шуберта, записанные при помощи диаграмм Юнга, являются универсальными и не зависят от конкретных k и n. Например, *коразмерность (комплексная) цикла Шуберта равна площади диаграммы Юнга*, $\operatorname{codim} \sigma_\lambda = |\lambda| = \sum \lambda_i$.

Для заданных k и n непустые клетки Шуберта соответствуют диаграммам Юнга, являющимся поддиаграммами в диаграмме, состоящей из k столбцов высоты $n-k$.

Определение 19.1. *Примитивным* циклом Шуберта называется цикл, соответствующий диаграмме Юнга, состоящей из одного ненулевого столбца.

Теорема 19.2. *Классы примитивных циклов Шуберта мультипликативно порождают кольцо когомологий грассманиана. А именно, класс произвольного цикла выражается через примитивные по следующей* ***формуле Джамбели***,

$$\begin{aligned}\sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} &= \det \|\sigma_{\lambda_i - i + j}\|_{i,j=1,\ldots,k} \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_{\lambda_1} & \sigma_{\lambda_1+1} & \cdots & \sigma_{\lambda_1+n-1} \\ \sigma_{\lambda_2-1} & \sigma_{\lambda_2} & \cdots & \sigma_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{\lambda_k-n+1} & \sigma_{\lambda_k-n+2} & \cdots & \sigma_{\lambda_k} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Для упрощения мы используем одно и то же обозначение σ_λ как для циклов Шуберта, так и для двойственных им когомологических классов. В правой части равенства мы полагаем $\sigma_0 = 1$ и $\sigma_i = 0$ при $i < 0$ (а также при $i > n-k$). Заметим, что определитель в правой части не зависит от n и k: если $\lambda_k = 0$, то в нижней строке определителя имеется только один ненулевой элемент и определитель сводится к аналогичному меньшего размера. Определитель в правой части равенства называется *функцией Шура*.

Имеется изоморфизм $G_{k,n} \simeq G_{n-k,n}$, сопоставляющий k-мерной плоскости ее аннулятор, рассматриваемый как $(n-k)$-мерное продпространство в двойственном пространстве.

Задача 19.3. Докажите, что указанный изоморфизм $G_{k,n} \to G_{n-k,n}$ переводит клетки Шуберта в клетки Шуберта, при этом диаграммы Юнга соответствующих друг другу клеток Шуберта *двойственны*, то есть столбцы одной из них образованы строками другой.

Обозначим через $\tilde{\sigma}_i = \sigma_{1,\dots,1}$ (i единиц) примитивный цикл Шуберта двойственного разбиения. Тогда из двойственности вытекает альтернативная формула для классов циклов Шуберта

$$\sigma_\lambda = \tilde{\sigma}_\mu = \det \|\tilde{\sigma}_{\mu_i - i + j}\|_{i,j=1,\dots,n-k},$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-k})$ – диаграмма Юнга, двойственная к λ.

Формула теоремы остается справедливой и в случае, когда клетка Шуберта, отвечающая данной диаграмме Юнга, является пустой, то есть когда диаграмма не является поддиаграммой диаграммы $(n-k, \dots, n-k)$. В этом случае левая часть равенства обращается в ноль и выражения, стоящие в правой части, описывают соотношения между мультипликативными образующими когомологий грассманиана. Можно показать, что все соотношения порождаются соотношениями $\sigma_i = 0$ $(i > n-k)$ и $\tilde{\sigma}_j = 0$ $(j > k)$.

У формулы Джамбели имеется прямое доказательство, основанное на анализе геометрии пересечения циклов Шуберта, определенных по отношению к двум различным флагам. Несколько других доказательств, несомненно более концептуальных, используют аппарат теории характеристических классов. Мы не будем приводить доказательство этой формулы, а ограничимся рассмотрением лишь одного примера.

Пример 19.4. Рассмотрим более подробно кольцо когомологий грассманиана $G_{2,4}$. Это многообразие имеет размерность $\dim G_{2,4} = 4$. Его можно отождествить с многообразием проективных прямых в трехмерном проективном пространстве. Примыкания клеток Шуберта изображены на следующей диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\text{codim} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
& & & \sigma_2 \arrow[dr] & & \\
& \sigma_0 \arrow[r] & \sigma_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \sigma_{2,1} \arrow[r] & \sigma_{2,2} \\
& & & \sigma_{1,1} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Классы σ_1 и σ_2 можно взять в качестве мультипликативных образующих, классы остальных циклов Шуберта выражаются через эти:

$$\sigma_{1,1} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ 1 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sigma_1^2 - \sigma_2,$$

$$\sigma_{2,1} = \begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sigma_1\,\sigma_2,$$

$$\sigma_{1,1} = \begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_2^2$$

(напомним, что $\sigma_3 = 0$). Идеал соотношений порождается следующими двумя

$$0 = \sigma_{1,1,1} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \\ 1 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ 0 & 1 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sigma_1^3 - 2\,\sigma_1\,\sigma_2,$$

$$0 = \sigma_{1,1,1,1} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 1 & \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sigma_1^4 - 3\,\sigma_1^2\,\sigma_2 + \sigma_2^2.$$

Иными словами,

$$H^*(G_{2,4}) = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2]}{(\sigma_1^3 - 2\,\sigma_1\,\sigma_2,\ \sigma_1^4 - 3\,\sigma_1^2\,\sigma_2 + \sigma_2^2)}.$$

Действительно, в размерности $2 \times 2 = 4$ мономы σ_1^2 и σ_2 линейно независимы и выражаются линейно через классы σ_2 и $\sigma_{1,1}$. В размерности $2 \times 3 = 6$ имеется два монома σ_1^3 и $\sigma_1\,\sigma_2$ и одно соотношение $\sigma_1^3 - 2\,\sigma_1\,\sigma_2 = 0$ между ними. Используя это соотношение, мы находим

$$\sigma_1\,\sigma_2 = \sigma_{2,1}, \qquad \sigma_1^3 = 2\,\sigma_{2,1}.$$

В размерности $2 \times 4 = 8$ имеется 3 монома σ_1^4, $\sigma_1^2\,\sigma_2$ и σ_2^2 и два соотношения между ними $\sigma_1\,(\sigma_1^3 - 2\,\sigma_1\,\sigma_2) = \sigma_1^4 - 3\,\sigma_1^2\,\sigma_2 + \sigma_2^2 = 0$. Отсюда,

$$\sigma_1^2\,\sigma_2 = \sigma_2^2 = \sigma_{2,2}, \qquad \sigma_1^4 = 2\,\sigma_{2,2}.$$

Все мономы большей степени лежат в идеале соотношений.

Приведенные вычисления отвечают, в частности, на следующий вопрос: *сколько существует прямых в трехмерном пространстве, пересекающих данные четыре, находящиеся в общем положении?*

Множество прямых, пересекающих данную, образует цикл Шуберта σ_1. Таким образом, ответом на вопрос служит индекс четырехкратного самопересечения класса σ_1, равный

$$(\sigma_1^4, [G_{2,4}]) = (2\,\sigma_{2,2}, [G_{2,4}]) = 2.$$

В существовании двух прямых, проходящих через четверку заданных, можно убедиться и из геометрических соображений. Рассмотрим гиперболоид в трехмерном пространстве, заданный общим многочленом второй степени. На нем лежит два семейства прямых, каждое из которых заметает гиперболоид целиком. Проективным преобразованием можно добиться того, чтобы три заданные прямые стали тремя прямыми одного семейства на гиперболоиде. Тогда прямые, пересекающие эти три, образуют второе семейство прямых, лежащих на гиперболоиде. Четвертая заданная прямая пересекает гиперболоид в случае общего положения в двух точках. Этим двум точкам и соотвествуют прямые, пересекающие четыре заданные.

Введение в теорию гомологий
Письменный экзамен, 7 декабря 2005 г.

1. Определите эйлерову характеристику следующих пространств:
   а) [2] $\mathbb{R}P^n$;
   б) [2] $\mathbb{C}P^n$;
   в) [2] $T^n = (S^1)^n$;
   г) [3] многообразие неориентированных (аффинных) прямых в $\mathbb{R}^3$;
   д) [4] многообразие неориентированных проективных прямых в $\mathbb{R}P^3$;
   е) [5] вещественных симметричных невырожденных матриц порядков 2 и 3;
   ж) [1] сферы с g ручками.
2. Найдите (рациональные) числа Бетти следующих пространств:
   а) [4] унитарных матриц второго порядка $U(2)$;
   б) [8] подмногообразия в в $\mathbb{C}^3$, заданного уравнениями
   $$x^3 + y^3 + z^3 = 0;\ |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1;$$
   в) [3] $T^n = (S^1)^n$;
   г) [8] многообразия $G^+_{2,4}$ ориентированных двумерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^4$;
   д) [4] дополнения к объединению трех различных комплексных прямых в $\mathbb{C}P^2$ (для различных их конфигураций).
3. Найдите индексы пересечения следующих пар многообразий:
   а) [2] кривых на двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$, заданных параметрически уравнениями ($x = \cos\phi$, $y = \sin\phi$) и ($x = \sin 3\psi$, $y = \cos 2\psi$), $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$;
   б) [4] комплексных кривых в $\mathbb{C}P^2$, заданных в аффинных координатах (z, w) уравнениями $w = 0$ и $w = z^2$;
   в) [4] комплексных кривых в $\mathbb{C}P^2$, заданных в аффинных координатах (z, w) уравнениями $w = 0$ и $z\,w = 0$;
   г) [6] вещественных поверхностей, заданных уравнениями $x^2+y^2+z^2 = 1$ и $x^2+y^2+z^2 = 1$ в многообразии комплексных решений этого уравнения.
4. [5] Каково минимальное число точек пересечения поверхности в $\mathbb{C}P^2$, заданной в аффинных координатах уравнением $y^2 = x^3 - x$, с близкой трансверсально ее пересекающей поверхностью? А если отбросить условие трансверсальности?

5. [8] Пусть B^2_+ и B^2_- – двумерные диски, заданные в комплексных координатах неравенствами $|z| \leqslant 1$ и $|w| \leqslant 1$, соответственно. Рассмотрим трехмерное многообразие M_k, полученное из пространств $B^2_+ \times S^1$ и $B^2_- \times S^1$ следующим отождествлением границ:

$$\partial(B^2_+ \times S^1) \to \partial(B^2_- \times S^1) : (z, \xi) \mapsto (z, z^k \xi),$$

где окружность S^1 задается на комплексной прямой уравнением $|\xi| = 1$. Диффеоморфны ли M_k и M_ℓ для различных k и ℓ?